ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12^{o}

12.1 (i) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{7}{6^{k-1}}$

Παρατηρούμε ότι η σειρά αυτή είναι γεωμετρική σειρά με $\alpha_1 = 7$, $r= -\frac{1}{6} \Rightarrow |r|<1$

Άρα η σειρά συγκλίνει με: $S=\frac{\alpha}{1-r}=\frac{7}{1+\frac{1}{6}}=6$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{2}\right)^{k+1}$

Η σειρά είναι γεωμετρική με $r= -\frac{3}{2} \Rightarrow |r|>1$

Άρα η σειρά αποκλίνει

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+2)(k+3)}$

$\frac{1}{(k+2)(k+3)}=\frac{A}{k+2}+\frac{B}{k+3} \Rightarrow A=1, B= -1$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}...+\frac{1}{n+2}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\rightarrow\frac{1}{3}$

$\Rightarrow S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}$. Η σειρά συγκλίνει

(iv) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{9k^2+3k-2}$

$\frac{1}{9k^2+3k-2}=\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}=\frac{A}{3k-1}+\frac{B}{3k+2} \Rightarrow A=\frac{1}{3}, B= -\frac{1}{3}$

$S_n=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k-2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)\rightarrow\frac{1}{6}$ Δηλαδή η σειρά συγκλίνει

$\Rightarrow S=\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{6}$

(v) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^{k+2}}{7^{k-1}}=\sum_{k=1}^{\infty}4^3\left(\frac{4}{7}\right)^{k-1}$

Γεωμετρική σειρά με: $\alpha_1 = 64, r=\frac{4}{7}<1$ Άρα η σειρά συγκλίνει με:

$\Rightarrow S=\frac{64}{1-\frac{4}{7}}=\frac{448}{3}$

(vi) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}$ Γεωμετρική σειρά με $\alpha_1 = -\frac{1}{2}, r= -\frac{1}{2} \Rightarrow |r|<1$. Η σειρά συγκλίνει με:

$\Rightarrow S=\frac{-1/2}{1+1/2}= -\frac{1}{3}$

12.2 (i) $\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

$$\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)=\ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right)=\ln\left(\frac{k-1}{k}\right)+\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

$$\Rightarrow S_n=\sum_{k=2}^{n}\left[\ln\left(\frac{k-1}{k}\right)+\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\right]=\ln\frac{1}{2}+\cancel{\ln\frac{3}{2}}+\cancel{\ln 2}+\cancel{\ln\frac{4}{3}}+\ldots+\cancel{\ln\frac{n-1}{n}}+\ln\frac{n+1}{n}$$

$$=\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{n+1}{n}= -\ln 2+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\to -\ln 2$$

Άρα η σειρά συγκλίνει με: $S=\lim_{n\to\infty} S_n = -\ln 2$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}}$

$$\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

$$\Rightarrow S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\to 1$$

$$\Rightarrow S=\lim_{n\to\infty} S_n=1$$

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\to 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow S=\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{3}{2}$$

12.3 $\frac{6^k}{\left(3^{k+1}-2^{k+1}\right)\left(3^k-2^k\right)}=\frac{2^kA}{3^{k+1}-2^{k+1}}+\frac{2^kB}{3^k-2^k} \Leftrightarrow 2^kA\left(3^{k+1}-2^{k+1}\right)+2^kB\left(3^k-2^k\right)=6^k$

$$\Leftrightarrow 3A6^k-2A2^{2k}+B6^k-B2^{2k}=6^k \Leftrightarrow (3A+B)6^k-2^{2k}(B+2A)=6^k$$

$\Leftrightarrow 3A+B=1$ και $B+2A=0 \Rightarrow A=1,\ B=-2$

Άρα: $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2^k}{3^k-2^k}-\frac{2^{k+1}}{3^{k+1}-2^{k+1}}\right)$

Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $\alpha_k=\frac{2^k}{3^k-2^k}$ τότε $\alpha_{k+1}=\frac{2^{k+1}}{3^{k+1}-2^{k+1}}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k-\alpha_{k+1}\right)=\cancel{\alpha_1}-\cancel{\alpha_2}+\cancel{\alpha_2}-\cancel{\alpha_3}+\ldots+\cancel{\alpha_n}-\alpha_{n+1}=\alpha_1-\alpha_{n+1}=\frac{2}{3-2}-\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}-2^{n+1}}$$

$$=2-\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}-2^{n+1}}=2-\frac{\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}^{0}}{1-\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}^{0}}\to 2$$

$$\Rightarrow S=\lim_{n\to\infty} S_n=2$$

12.4 (i) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k = 1-x+x^2-x^3+...$

Γεωμετρική σειρά με $\alpha_1=1,\ r=-x$

Η σειρά συγκλίνει αν $|r|<1 \Rightarrow |-x|=|x|<1$

Επομένως: $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}$ αν $-1<x<1$

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty}(x-3)^k$

Γεωμετρική σειρά με: $\alpha_1=1,\ r=x-3$

Η σειρά συγκλίνει αν $|r|<1 \Rightarrow |x-3|<1 \Leftrightarrow 2<x<4$

Επομένως: $\sum_{k=0}^{\infty}(x-3)^k = \frac{1}{1-x+3} = \frac{1}{4-x}$ αν $2<x<4$

(iii) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left(x^2\right)^k$

Γεωμετρική σειρά με: $\alpha_1=1,\ r=-x^2$

Η σειρά συγκλίνει αν: $|r|<1 \Rightarrow \left|-x^2\right| = x^2<1 \Leftrightarrow -1<x<1$

Επομένως : $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2}$ αν $-1<x<1$

12.5 (i) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2+k+3}{2k^2+1}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+3}{2n^2+1} = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2+k+3}{2k^2+1}$ αποκλίνει

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ αποκλίνει

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^k}{k}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{1} = +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^k}{k}$ αποκλίνει

12.6 $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(\ln k)^p}$

<u>Περίπτωση 1^η:</u> p=1

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}=\lim_{k\to\infty}\int_2^k\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\lim_{k\to\infty}\left[\ln(\ln x)\right]_2^k=\lim_{k\to\infty}\left[\ln(\ln k)-\ln(\ln 2)\right]=+\infty$$

<u>Περίπτωση 2^η:</u> $p\neq 1$

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p}=\lim_{k\to\infty}\int_2^k(\ln x)^{-p}d(\ln x)=\lim_{k\to\infty}\left.\frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p}\right|_2^k=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{(\ln k)^{1-p}}{1-p}+\frac{1}{(p-1)(\ln 2)^{p-1}}\right]$$

Όμως :

$$\lim_{k\to\infty}(\ln k)^{1-p}=\begin{cases}+\infty, & p<1\\ 0, & p>1\end{cases}$$

Άρα από το κριτήριο της ολοκλήρωσης η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(\ln k)^p}$ συγκλίνει αν p>1 και αποκλίνει αν $p\leq 1$.

12.7 (i) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k}{k!}$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{3^{k+1}}{(k+1)!}\frac{k!}{3^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{3}{k+1}=0<1\Rightarrow \text{Η σειρά συγκλίνει}$$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^k}{k^2}$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{4^{k+1}}{(k+1)^2}\frac{k^2}{4^k}=\lim_{k\to\infty}4\left(\frac{k}{k+1}\right)^2=4>1\Rightarrow \text{Η σειρά αποκλίνει}$$

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{1}{2}\right)^k$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)}{2^{k+1}}\frac{2^k}{k}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{2}<1\Rightarrow \text{Η σειρά συγκλίνει}$$

(iv) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^3}$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)!}{(k+1)^3}\frac{k^3}{k!}=\lim_{k\to\infty}(k+1)\left(\frac{k}{k+1}\right)^3=+\infty\Rightarrow \text{Η σειρά αποκλίνει}$$

(v) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^2+1}$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{\left[(k+1)^2+1\right]}\frac{k^2+1}{k}=\lim_{k\to\infty}\frac{k^3+k^2+k+1}{(k^2+2k+2)k}==\lim_{k\to\infty}\frac{k^3+k^2+k+1}{k^3+2k^2+2k}=1$$

$\Rightarrow$ Δεν μπορούμε να αποφανθούμε

12.8 (i) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3k+2}{2k-1}\right)^{k}$

$\lim_{k\to\infty}(\alpha_k)^{1/k}=\lim_{k\to\infty}\left[\left(\frac{3k+2}{2k-1}\right)^{k}\right]^{1/k}=\lim_{k\to\infty}\frac{3k+2}{2k-1}=\frac{3}{2}>1\Rightarrow$ Η σειρά αποκλίνει

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{1998}\right)^{k}$

$\lim_{k\to\infty}(\alpha_k)^{1/k}=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{1998}=+\infty\Rightarrow$ Η σειρά αποκλίνει

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{5^{k}}$

$\lim_{k\to\infty}(\alpha_k)^{1/k}=\lim_{k\to\infty}\frac{k^{1/k}}{5}=\frac{1}{5}<1\Rightarrow$ Η σειρά συγκλίνει

(iv) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+e^{-k}\right)^{k}$

$\lim_{k\to\infty}(\alpha_k)^{1/k}=\lim_{k\to\infty}\left(1+e^{-k}\right)=1\Rightarrow$ Δεν μπορούμε να αποφανθούμε

12.9 (i) $\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{2}{3}\right)^{k}$

$\lim_{k\to\infty}(\alpha_k)^{1/k}=\lim_{k\to\infty}k^{1/k}\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}<1\Rightarrow$ Από το κριτήριο της ρίζας η σειρά συγκλίνει

(ii) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k}$

Επειδή : $\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{k\to\infty}\int_{2}^{k}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{k\to\infty}\left[\ln(\ln x)\right]_{2}^{k}=\lim_{k\to\infty}\left[\ln(\ln k)-\ln(\ln 2)\right]=+\infty$.

Από το κριτήριο της ολοκλήρωσης η σειρα αποκλίνει.

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{7k-1}\right)^{k}$

$\lim_{k\to\infty}(\alpha_k)^{1/k}=\lim_{k\to\infty}\frac{4}{7k-1}=0<1\Rightarrow$ Από το κριτήριο της ρίζας η σειρά συγκλίνει

(iv) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+\sqrt{k}}$

$\frac{1}{1+\sqrt{k}}\geq\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k}}=\frac{1}{2\sqrt{k}}$

Όμως : $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{k}}=+\infty$

Άρα από το κριτήριο της σύγκρισης η σειρά αποκλίνει

12.9 (v) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{e^k}$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\ln(k+1)}{e^{k+1}}\frac{e^k}{\ln k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\ln(k+1)}{e\ln k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{e}{k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{e(k+1)}=\frac{1}{e}<1$$

Άρα από το κριτήριο του λόγου η σειρά συγκλίνει.

(vi) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+4)!}{4!k!4^k}$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{(k+5)!}{4!(k+1)!4^{k+1}}\frac{4!k!4^k}{(k+4)!}=\lim_{k\to\infty}\frac{(k+5)}{4(k+1)}=\frac{1}{4}<1$$

Από το κριτήριο του λόγου η σειρά συγκλίνει.

12.10 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{3^k}$

(α) $\lim_{k\to\infty}(\alpha_k)^{1/k}=\lim_{k\to\infty}\frac{(\ln k)^{1/k}}{3}=\frac{1}{3}\lim_{k\to\infty}(\ln k)^{1/k}$

$$y=(\ln x)^{1/x}\Rightarrow \ln y=\frac{\ln x}{x}\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}y=e^0=1\Rightarrow \lim_{k\to\infty}(\ln k)^{1/k}$$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty}(\alpha_k)^{1/k}=\frac{1}{3}\lim_{k\to\infty}(\ln k)^{1/k}=\frac{1}{3}<1\Rightarrow$ Η σειρά συγκλίνει(κριτήριο της ρίζας)

(β) $\lim_{\kappa\to\infty}\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}=\lim_{\kappa\to\infty}\frac{\ln(k+1)}{3^{k+1}}\frac{3^k}{\ln k}=\lim_{\kappa\to\infty}\frac{\ln(k+1)}{3\ln k}=\frac{1}{3}\lim_{\kappa\to\infty}\frac{1/k+1}{1/k}=\frac{1}{3}\lim_{\kappa\to\infty}\frac{k}{k+1}=\frac{1}{3}<1$

Από το κριτήριο του λόγου η σειρά συγκλίνει.

12.11(i) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k+5}$

$$\frac{1}{3^k+5}\le\frac{1}{3^k}$$

Η $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k$ συγκλίνει διότι είναι γεωμετρική σειρά με λόγο $r=\frac{1}{3}$

Άρα απο το κριτήριο της σύγκρισης η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k+5}$ συγκλίνει

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{5k^2-k}$

$$\frac{1}{5k^2-k}\le\frac{1}{5k^2-k^2}=\frac{1}{4k^2}$$

Η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ συγκλίνει διότι είναι p-σειρά με p=2

Άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{5k^2-k}$ συγκλίνει(κριτήριο της σύγκρισης)

12.11(iii) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k-1}{3^k+2k}$

$$\frac{2^k-1}{3^k+2k}\le\frac{2^k}{3^k}=\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k$ διότι είναι γεωμετρική σειρά με λόγο $r=\frac{2}{3}$

Άρα και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k-1}{3^k+2k}$ συγκλίνει από το κριτήριο της σύγκρισης.

(iv) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{k-\frac{1}{4}}$

$$\frac{3}{k-\frac{1}{4}}=\frac{12}{4k-1}\ge\frac{12}{4k}\ge\frac{1}{k}$$

Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ αποκλίνει(p-σειρά με p=1)

Άρα και σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{k-\frac{1}{4}}$ αποκλίνει.

(v) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{9}{\sqrt{k}+1}$

$$\frac{9}{\sqrt{k}+1}\ge\frac{9}{\sqrt{k}+\frac{\sqrt{k}}{2}}=\frac{18}{3\sqrt{k}}=\frac{6}{\sqrt{k}}$$

Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6}{\sqrt{k}}$ αποκλίνει διότι είναι p-σειρά με $p=\frac{1}{2}<1$

Άρα και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{9}{\sqrt{k}+1}$ αποκλίνει.

(vi) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k+1}{k^2-k}$

$$\frac{k+1}{k^2-k}\ge\frac{k}{k^2}=\frac{1}{k}$$

Η $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}$ αποκλίνει διότι είναι p-σειρά με p=1

Άρα και η $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k+1}{k^2-k}$ αποκλίνει.

12.12(i) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4k^2\text{-}2k+6}{8k^7+k\text{-}8}$ Σύγκριση με την $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^5}$ η οποία συγκλίνει (p-σειρά με p=5)

$$p=\lim_{k\to\infty}\frac{4k^2\text{-}2k+6}{8k^7+k\text{-}8}\frac{k^5}{1}=\frac{1}{2}$$

Άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4k^2\text{-}2k+6}{8k^7+k\text{-}8}$ συγκλίνει.

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5}{3^k+1}$ Σύγκριση με την $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5}{3^k}$ η οποία συγκλίνει (γεωμετρική σειρά)

$$p=\lim_{k\to\infty}\frac{5}{3^k+1}\frac{3^k}{5}=\lim_{k\to\infty}\frac{3^k}{3^k+1}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^k}=1$$

Άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5}{3^k+1}$ συγκλίνει.

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{8k^2\text{-}3k}}$ Σύγκριση με την $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2/3}}$ η οποία αποκλίνει(p-σειρά με $p=2/3<1$)

$$p=\lim_{k\to\infty}\frac{k^{2/3}}{\left(8k^2\text{-}3k\right)^{1/3}}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k^2}{8k^2\text{-}3k}\right)^{1/3}=\left(\frac{1}{8}\right)^{1/3}=\frac{1}{2}$$

Άρα και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{8k^2\text{-}3k}}$ αποκλίνει.

(iv) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+3)^{20}}$ Σύγκριση με την $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{20}}$ η οποία συγκλίνει (p-σειρά με p=20)

$$p=\lim_{k\to\infty}\frac{k^{20}}{(2k+3)^{20}}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{2k+3}\right)^{20}=\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$$

Άρα κα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+3)^{20}}$ συγκλίνει

12.13 (i) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3+2k+1}$

$\frac{1}{k^3+2k+1}<\frac{1}{k^3}$ Η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$ συγκλίνει (p-σειρά με p=3)

Άρα και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3+2k+1}$ συγκλίνει από το κριτήριο της σύγκρισης

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k}}{k^3+1}$

$\frac{\sqrt{k}}{k^3+1}\le\frac{\sqrt{k}}{k^3}=\frac{1}{k^{5/2}}$ Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{5/2}}$ συγκλίνει (p-σειρά με $p=5/2$)

Άρα και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k}}{k^3+1}$ συγκλίνει από το κριτήριο της σύγκρισης.

12.13 (iii) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2+\sqrt{k}}{(k+1)^3-1}$

$$\frac{2+\sqrt{k}}{(k+1)^3-1}\le\frac{\sqrt{k}+\sqrt{k}}{(k+1)^3-\frac{(k+1)^3}{2}}=\frac{2\sqrt{k}}{\frac{(k+1)^3}{2}}=\frac{4\sqrt{k}}{(k+1)^3}\le\frac{4\sqrt{k}}{k^3}=\frac{4}{k^{5/2}}$$

Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^{5/2}}=4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{5/2}}$ συγκλίνει (p-σειρά με $p={}^5\!/_2$)

Άρα από το κριτήριο της σύγκρισης και η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2+\sqrt{k}}{(k+1)^3-1}$ συγκλίνει.

(iv) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4+2^{-k}}$

$$p=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{4+2^{-k}}=\frac{1}{4}\ne 0$$

Άρα από το κριτήριο της απόκλισης η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4+2^{-k}}$ αποκλίνει.

(v) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tan^{-1}k}{k^2}$

$\frac{\tan^{-1}k}{k^2}\le\frac{\pi/2}{k^2}$ Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi/2}{k^2}=\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ συγκλίνει (p-σειρά με p=2)

Επομένως από το κριτήριο της σύγκλισης η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tan^{-1}k}{k^2}$ συγκλίνει

(vi) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^k+k}{k!+3}$

$$\frac{5^k+k}{k!+3}\le\frac{5^k+5^k}{k!}=2\frac{5^k}{k!}$$

Τώρα θα εξετάσω την σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^k}{k!}$ Από το κριτήριο του λόγου έχουμε ότι:

$\lim_{k\to\infty}\frac{5^{k+1}}{(k+1)!}\frac{k!}{5^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{5}{k+1}=0<1$ Άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^k}{k!}$ συγκλίνει

$\Rightarrow$ Από το κριτήριο της σύγκρισης και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^k+k}{k!+3}$ συγκλίνει.

(vii) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k\sqrt{k}}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\ln k}{k\sqrt{k}}$ διότι ln1=0

$$\int_2^{\infty}\frac{\ln x}{x^{3/2}}dx=\lim_{k\to\infty}\int_2^{k}\frac{\ln x}{x^{3/2}}dx=\lim_{k\to\infty}\left[-\frac{2\ln x}{x^{1/2}}+2\int_2^k\frac{1}{x^{3/2}}dx\right]=\lim_{k\to\infty}\left[-\frac{2\ln x}{x^{1/2}}-\frac{4}{x^{1/2}}\right]_2^k$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left[-\frac{2\ln x}{x^{1/2}}-\frac{4}{x^{1/2}}\right]_2^k=\lim_{k\to\infty}\left[-\frac{2\ln k}{k^{1/2}}-\frac{4}{k^{1/2}}+\frac{2\ln 2}{2^{1/2}}+\frac{4}{2^{1/2}}\right]=...=\sqrt{2}\left(\ln 2+2\right)$$

Επομένως από το κριτήριο της ολοκλήρωσης η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k\sqrt{k}}$ συγκλίνει.

12.13 (viii) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(1/k\right)}{k^2}$

$\frac{\cos\left(1/k\right)}{k^2}\leq\frac{1}{k^2}$ Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ συγκλίνει (p-σειρά με p=2)

Επομένως και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(1/k\right)}{k^2}$ συγκλίνει από το κριτήριο της σύγκρισης.

12.14 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}$

$$\frac{1}{k!}=\frac{1}{1\bullet 2\bullet 3\bullet 4\bullet 5\bullet\bullet\bullet k}\leq\frac{1}{1\bullet\underbrace{2\bullet 2\bullet 2\bullet 2\bullet\bullet\bullet 2}_{\text{k-1 φορές}}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ συγκλίνει αφού είναι γεωμετρική σειρά

Άρα από το κριτήριο της σύγκρισης η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}$ συγκλίνει.

12.15 (i) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$

$\left|\alpha_{k+1}\right|=\frac{1}{2k+3}\leq\frac{1}{2k+1}=\left|\alpha_k\right|$ (1)

$\lim_{k\to\infty}\left|\alpha_k\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k+1}=0$ (2)

$(1),(2)\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ συγκλίνει

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k}{3^k}$

$\left|\alpha_{k+1}\right|=\frac{k+1}{3^{k+1}}\leq\frac{k}{3^k}=\left|\alpha_k\right|$ (1)

$\lim_{k\to\infty}\left|\alpha_k\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{3^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{3^k\ln 3}=0$ (2)

$(1),(2)\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k}{3^k}$ συγκλίνει

12.15 (iii) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k+1}{3k+1}$

$\lim_{k\to\infty}|\alpha_k|=\lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{3k+1}=\frac{1}{3}\neq 0$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k+1}{3k+1}$ αποκλίνει

(iv) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{\ln k}{k}$

$|\alpha_{k+1}|=\frac{\ln(k+1)}{k+1}<\frac{\ln k}{k}=|\alpha_k|$ (1)

$\lim_{k\to\infty}|\alpha_k|=\lim_{k\to\infty}\frac{\ln k}{k}=\lim_{k\to\infty}\frac{1/k}{1}=0$ (2)

(1),(2) $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k}{3^k}$ συγκλίνει

12.16 (i) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^{k}$

$\rho=\lim_{k\to\infty}\frac{\left(3/5\right)^{k+1}}{\left(3/5\right)^{k}}=\frac{3}{5}<1\Rightarrow$ Η σειρά συγκλίνει απόλυτα.

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{3^k}{k^2}$

$\rho=\lim_{k\to\infty}\frac{3^{k+1}}{(k+1)^2}\frac{k^2}{3^k}=\lim_{k\to\infty}3\left(\frac{k}{k+1}\right)^2=3>1\Rightarrow$ Η σειρά δεν συγκλίνει απόλυτα.

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{k^3}{e^k}$

$\rho=\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^3}{e^{k+1}}\frac{e^k}{k^3}=\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^3}{ek^3}=\frac{1}{e}<1\Rightarrow$ Η σειρά συγκλίνει απόλυτα.

(iv) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k^k}{k!}$

$\rho=\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}\frac{k!}{k^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^k}{k^k}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=e>1\Rightarrow$ Η σειρά δεν συγκλίνει απόλυτα.

12.17 (i) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\frac{k+2}{3k-1}\right)^k$, $\alpha_k=(-1)^{k+1}\left(\frac{k+2}{3k-1}\right)^k$

$|\alpha_k|=\left(\frac{k+2}{3k-1}\right)^k$, $\rho=\lim_{k\to\infty}|\alpha_k|^{1/k}=\lim_{k\to\infty}\frac{k+2}{3k-1}=\frac{1}{3}<1$

$\Rightarrow$ Από το κριτήριο της ρίζας η σειρά συγκλίνει απόλυτα.

12.17 (ii) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k+2}{k(k+3)}$, $\alpha_k=(-1)^{k+1}\frac{k+2}{k(k+3)}$

$$|\alpha_k|=\frac{k+2}{k(k+3)}\geq\frac{k}{k^2+3k}\geq\frac{k}{k^2+3k^2}=\frac{1}{4k}$$

Επειδή η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ αποκλίνει $\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|$ αποκλίνει $\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ δεν συγκλίνει απόλυτα

Όμως η $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k+2}{k(k+3)}$ συγκλίνει (ως εναλλάσσουσα σειρά) διότι :

$$|\alpha_{k+1}|=\frac{k+3}{(k+1)(k+4)}<\frac{k+2}{k(k+3)}=|\alpha_k| \text{ και } \lim_{k\to\infty}\frac{k+2}{k(k+3)}=0$$

Άρα η $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k+2}{k(k+3)}$ συγκλίνει σχετικά.

(iii) $\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1}{k\ln k}$, $\alpha_k=\frac{1}{k\ln k}$

Επειδή: $\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{k\to\infty}\int_{2}^{k}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{k\to\infty}\left[\ln(\ln x)\right]_2^k=\lim_{k\to\infty}\left[\ln(\ln k)-\ln(\ln 2)\right]=+\infty$

Άρα από το κριτήριο της ολοκλήρωσης η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty}|\alpha_k|$ αποκλίνει

Επομένως η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1}{k\ln k}$ δεν συγκλίνει απόλυτα.

Όμως η $\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1}{k\ln k}$ συγκλίνει (ως εναλλάσσουσα σειρά) διότι:

$$|\alpha_{k+1}|=\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)}<\frac{1}{k\ln k}=|\alpha_k| \text{ και } \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k\ln k}=0$$

Άρα η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1}{k\ln k}$ συγκλίνει σχετικά.

(iv) $\sum_{k=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{\ln k}\right)^k$, $\alpha_k=\frac{(-1)^k}{(\ln k)^k}$

$$|\alpha_k|=\frac{1}{(\ln k)^k},\ \rho=\lim_{k\to\infty}|\alpha_k|^{1/k}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\ln k}=0<1$$

$\Rightarrow$ Από το κριτήριο της ρίζας η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty}|\alpha_k|$ συγκλίνει

$\Rightarrow$ Η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{\ln k}\right)^k$ συγκλίνει απόλυτα.

12.17 (v) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}},\ \alpha_k=\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

$|\alpha_k|=\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\geq\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+1}}=\frac{1}{2\sqrt{k+1}}$

Η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{k+1}}=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$ αποκλίνει (p-σειρά με $p=1/2<1$)

$\Rightarrow$ Από το κριτήριο της σύγκρισης η $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|$ αποκλίνει

$\Rightarrow$ Η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ δεν συγκλίνει απόλυτα

Όμως η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ συγκλίνει (ως εναλλάσσουσα σειρά) διότι:

$|\alpha_{k+1}|=\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}<\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=|\alpha_k|$ και $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=0$

Άρα η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ συγκλίνει σχετικά

(vi) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k^2+1}{k^3+2},\ \alpha_k=(-1)^k\frac{k^2+1}{k^3+2}$

$|\alpha_k|=\frac{k^2+1}{k^3+2}\geq\frac{k^2}{k^3+2}\geq\frac{k^2}{k^3+k^3}=\frac{k^2}{2k^3}=\frac{1}{2k}$

Η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ αποκλίνει $\Rightarrow$ Η $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|$ αποκλίνει

$\Rightarrow$ Η $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ δεν συγκλίνει απόλυτα

Θα δείξω όμως ότι η $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k^2+1}{k^3+2}$ συγκλίνει

Έστω $f(x)=\frac{x^2+1}{x^3+2}\Rightarrow f'(x)=\frac{x\left(4-3x-x^3\right)}{\left(x^3+2\right)^2}\leq 0,\ \forall x\geq 2$

$\Rightarrow|\alpha_k|=\frac{k^2+1}{k^3+2}$ φθίνουσα και επειδή $\lim_{k\to\infty}|\alpha_k|=\lim_{k\to\infty}\frac{k^2+1}{k^3+2}$

$\Rightarrow$ Η $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ συγκλίνει $\Rightarrow$ Η $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k^2+1}{k^3+2}$ συγκλίνει σχετικά

12.18 Δίδεται ότι : $\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...,\ \frac{\pi^4}{90}=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+...$

(i) $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+...=\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+...\right)=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...\right)$

$$=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{8}$$

(ii) $1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+...=\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}\right)-\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+...\right)=\frac{\pi^4}{90}-\frac{1}{2^4}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+...\right)$

$$=\frac{\pi^4}{90}-\frac{1}{16}\frac{\pi^4}{90}=\frac{\pi^4}{96}$$