<u>ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ</u>
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11 ^{o}</u>

11.1 (i) $\left\{1+(-1)^n\right\}$

$\alpha_1=0,\ \alpha_2=2,\ \alpha_3=0,\ \alpha_4=2,\ \alpha_5=0, \ldots$

Η ακολουθία αποκλίνει αφού παίρνει δύο τιμές μόνο εναλλάξ.

(ii) $\left\{(-1)^n \dfrac{2n^3}{n+1}\right\}$

$\alpha_1=-1,\ \ \alpha_2=\dfrac{16}{9},\ \alpha_3=-\dfrac{54}{28},\ \alpha_4=\dfrac{128}{65},\ \alpha_5=-\dfrac{250}{126}, \ldots$

Η ακολουθία αποκλίνει διότι οι περιττοί έχουν όριο: $\lim\limits_{n\to\infty}(-)\dfrac{2n^3}{n^3+1}=-2$ ενώ οι άρτιοι όροι έχουν όριο: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3}{n^3+1}=2$

(iii) $\left\{\cos\left(\dfrac{3}{n}\right)\right\}$

$\alpha_1=\cos 3,\ \alpha_2=\cos\left(\dfrac{3}{2}\right),\ \alpha_3=\cos 1,\ \alpha_4=\cos\left(\dfrac{3}{4}\right),\ \alpha_5=\cos\left(\dfrac{3}{5}\right), \ldots$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}=\cos 0=1 \Rightarrow$ Η ακολουθία συγκλίνει

(iv) $\left\{n^2e^{-n}\right\}$

$\alpha_1=e^{-1},\ \alpha_2=4e^{-2},\ \alpha_3=9e^{-3},\ \alpha_4=16e^{-4},\ \alpha_5=25e^{-5}, \ldots$

$\lim\limits_{x\to\infty}x^2e^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{e^x}==\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{e^x}=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}n^2e^{-n}=0 \Rightarrow$ Η ακολουθία συγκλίνει

(v) $\left\{\sqrt{n^2+3n}-n\right\}$

$\alpha_1=1,\ \alpha_2=\sqrt{10}-2,\ \alpha_3=\sqrt{18}-3,\ \alpha_4=\sqrt{28}-4,\ \alpha_5=\sqrt{40}-5, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}+1}=\frac{3}{2}$$

Άρα η ακολουθία συγκλίνει στο $\dfrac{3}{2}$

(vi) $\left\{\left(1-\frac{2}{n}\right)^n\right\}$

$\alpha_1=-1,\ \ \alpha_2=0, \alpha_3=\frac{1}{27}, \alpha_4=\left(\frac{2}{4}\right)^4, \alpha_5=\left(\frac{3}{5}\right)^5, \ldots$

$$y=\left(1-\frac{2}{x}\right)^x \Rightarrow \lim_{x\to\infty}(\ln y)=\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x-2)-\ln x}{1/x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}}{-1/x^2}$$

Θέτω:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x-x+2}{x(x-2)}}{-1/x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{1}=-2$$

Άρα η ακολουθία συγκλίνει στο –2

11.2 $\alpha_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\alpha_n+\frac{k}{\alpha_n}\right)$

Αν α_n συγκλίνει στο L $\Rightarrow \alpha_n \to L, \alpha_{n+1} \to L$

Άρα: $L=\frac{1}{2}\left(L+\frac{k}{L}\right) \Rightarrow 2L^2=L^2+k \Rightarrow L^2=k \Rightarrow L=\sqrt{k}$

Το $L=-\sqrt{k}$ απορρίπτεται επειδή όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι θετικοί.

11.3 Έστω ότι το πολύγωνο έχει πλευρά μήκους S_n

$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)=\frac{S_n}{2r} \Rightarrow S_n=2r\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

Άρα η περίμετρος P_n του πολυγώνου θα είναι: $P_n=2nr\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

Το μήκος της περιφέρειας του κύκλου θα είναι:

$$S=\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}2rn\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)=2r\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1/n}=2r\lim_{n\to\infty}\frac{-\pi/n^2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{-\pi/n^2}=2r\pi$$

11.4 (i) $\left\{n-2^n\right\}$

$\alpha_{n+1}-\alpha_n=n+1-2^n-n+2^{n+1}=1-2^n<0, \forall n\geq 1 \Rightarrow \alpha_n$ φθίνουσα

(ii) $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$

$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{2^n}=\frac{2}{n+1}\leq 1, \forall n\geq 1 \Rightarrow \alpha_n$ φθίνουσα

(iii) $\left\{\frac{10^n}{(2n)!}\right\}$

$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=\frac{10^{n+1}}{\left[2(n+1)\right]!}\frac{(2n)!}{10^n}=\frac{10}{(2n+1)(2n+2)}<1, \forall n\geq 1 \Rightarrow \alpha_n$ φθίνουσα

11.4 (iv) $\left\{\dfrac{n^n}{n!}\right\}$

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n}=\frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n^n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>1,\ \forall n\geq 1$$

(v) $\left\{\dfrac{1}{n\ \ln n}\right\}$

Έστω : $f(x)=\dfrac{1}{x\ \ln x}\Rightarrow f'(x)=-\dfrac{\ln x+1}{(x\ \ln x)^2}<0,\ \forall x\geq 1\Rightarrow f(x)$ φθίνουσα στο $[1,+\infty)$

$\Rightarrow \alpha_n$ φθίνουσα

(vi) $\left\{\tan^{-1}n\right\}$

Έστω : $f(x)=\tan^{-1}x\Leftarrow f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}>0,\ \forall x\geq 1\Rightarrow f(x)$ αύξουσα στο $[1,+\infty)$

$\Rightarrow \alpha_n$ αύξουσα

11.5 $\alpha_{n+1}=\sqrt{2+\alpha_n},\ n\geq 1$ με $\alpha_1=\sqrt{2}$

(i) $\alpha_1=\sqrt{2},\ \alpha_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\ \alpha_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

(ii) Με επαγωγή : Για $n=1$ ισχύει αφού $\alpha_1=\sqrt{2}<2$

Έστω ότι ισχύει για $n=k$

Εξετάζω την περίπτωση όπου $n=k+1$

$\alpha_{k+1}=\sqrt{2+\alpha_k}<\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2\Rightarrow \alpha_{k+1}<2\Rightarrow$ Ισχύει και για $n=k+1$

$\Rightarrow \alpha_n<2\ \forall n\in\mathbb{N}$

(iii) $\alpha_{n+1}^2-\alpha_n^2=\left(\sqrt{2+\alpha_n}\right)^2-\alpha_n^2=2+\alpha_n-\alpha_n^2$ (1)

$(2-\alpha_n)(1+\alpha_n)=2+2\alpha_n-\alpha_n-\alpha_n^2=2+\alpha_n-\alpha_n^2$ (2)

Από (1) και (2) : $\alpha_{n+1}^2-\alpha_n^2=(2-\alpha_n)(1+\alpha_n)$

(iv) $\alpha_{n+1}^2-\alpha_n^2=(2-\alpha_n)(1+\alpha_n)>0$ γιατί $\alpha_n<2\Rightarrow(\alpha_{n+1}-\alpha_n)(\alpha_{n+1}+\alpha_n)>0$

$\Rightarrow \alpha_{n+1}-\alpha_n>0\Rightarrow \alpha_{n+1}>\alpha_n\ \forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow \alpha_n$ γνησίως αύξουσα