ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο}

1.1 Υποθέτουμε ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός. Δηλαδή, υποθέτουμε ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί p και q τέτοιοι ώστε : $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$, p και q δεν έχουν κοινούς διαιρέτες.

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q} \Rightarrow p=q\sqrt{2} \Rightarrow p^2=2q^2$$

Παρατηρούμε ότι ο p^2 είναι άρτιος αφού είναι της μορφής 2k. Άρα και ο p είναι άρτιος αριθμός. Τότε $p^2=4k^2=2q^2$, άρα $q^2=2\kappa^2$
Αυτό δείχνει ότι και ο q^2 είναι άρτιος, άρα και ο q είναι άρτιος. Συνεπώς οι p και q είναι άρτιοι, πράγμα ΑΤΟΠΟ αφού αντιφάσκει με την υπόθεση ότι δεν έχουν κοινό διαιρέτη.

1.2 (i) Θέτουμε $x=0.\overline{123}$ Πολλαπλασιάζοντας επί 1000 βρίσκουμε $1000x=123.\overline{123}$
Αφαιρώντας τις δύο εξισώσεις έχουμε : $999x=123 \Rightarrow x=\dfrac{123}{999}=\dfrac{41}{333}$

(ii) Θέτουμε $x=12.\overline{7}$ και παίρνουμε $10x=127.\overline{7}$
Αφαιρώντας βρίσκουμε : $9x=115 \Rightarrow x=\dfrac{115}{9}$

(iii) Θέτουμε $x=38.07\overline{81}$. Πολλαπλασιάζοντας επί 100 βρίσκουμε $100x=3807.\overline{81}$
Αφαιρώντας έχουμε : $99x=3769.74 \Rightarrow x=\dfrac{3769.74}{99}=\dfrac{376974}{9900}=\dfrac{20943}{550}$

(iv) $0.4296\overline{0}=0.4296=\dfrac{4296}{10000}=\dfrac{537}{1250}$

1.3 (i) $\dfrac{4}{2-x}\leq 1 \Rightarrow \dfrac{4}{2-x}-1\leq 0 \Rightarrow \dfrac{x+2}{2-x}\leq 0$
Όταν το πηλίκο δύο αριθμών είναι θετικό (ή αρνητικό) τότε και το γινόμενο τους είναι θετικό (ή αρνητικό αντίστοιχα)
Άρα αρκεί να ελέγξουμε πότε : $f(x)=(x+2)(2-x)\geq 0,\ x\neq 2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f(x)		+	0	-	□	+	

Άρα η λύση είναι $x\leq -2$ ή $x>2$. Ισοδύναμα $x\in(-\infty,-2]\cup(2,+\infty)$

(ii) $(x-4)(x+2)>0$

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
(x- 4)(x+2)		+	0	-	0	+	

Γενική λύση : $x<-2$ ή $x>4$

1.4 (iii) $\dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{3}{x-2} \Rightarrow \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{3}{x-2} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{-2x-5}{(x+1)(x-2)} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{2x+5}{(x+1)(x-2)} \leq 0$

Αρκεί να ελέγξουμε για : $f(x)=(2x+5)(x+1)(x-2) \leq 0$, $x \neq -1{,}2$

x	$-\infty$		$-5/2$		-1		2		$+\infty$
f(x)		-	0	+	‖	-	‖	+	

Άρα $x \in (-\infty, -5/2] \cup (-1, 2)$

(iv) $x^3-3x+2 = x^3-x-2x+2 = x(x^2-1)-2(x-1) = x(x-1)(x+1)-2(x-1)$

$=(x-1)(x^2+x-2)=(x-1)(x-1)(x+2)=(x-1)^2(x+2)$

Άρα έχουμε : $(x-1)^2(x+2) \leq 0$

Το $(x-1)^2$ είναι πάντα θετικό άρα αρκεί να ελέγξουμε μόνο το $(x+2) \leq 0$

Άρα λύση : $x \leq -2$ με την ισότητα να ισχύει και για x=1

1.4 Εφαρμόζουμε την τριγωνική ανισότητα $|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|b|$

(i) $|\alpha-b|=|\alpha+(-b)| \leq |\alpha|+|-b|=|\alpha|+|b|$

(ii) $|\alpha| = |(\alpha-b)+b| \leq |\alpha-b|+|b| \Rightarrow |\alpha|-|b| \leq |\alpha-b|$

(iii) $|b| = |(b-\alpha)+\alpha| \leq |b-\alpha|+|\alpha| \Rightarrow |b|-|\alpha| \leq |b-\alpha| = |\alpha-b|$

Σε συνδυασμό με το (ii) έχουμε ότι : $\big|\, |\alpha|-|b| \,\big| \leq |\alpha-b|$

1.5 (i) Αδύνατη διότι $|\alpha| \geq 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

(ii) $|3x+2|=5 \Rightarrow 3x+2= \pm 5 \Rightarrow x = 1$ ή $x = -7/3$

(iii) Θέτουμε $|x-4|= t$ και η δοσμένη εξίσωση παίρνει τη μορφή :

$$t^2 - 4t-12=0 \Leftrightarrow (t - 6)(t + 2)=0$$

Άρα $t = -2$ ή $t = 6$. Επομένως

$|x -4|= -2$ (αδύνατη) ή $|x-4| = 6 \Leftrightarrow x- 4= \pm 6$. Άρα x=10 ή x=-2

(iv) $\left|\dfrac{x-3}{x- 4}\right|=5 \Rightarrow \dfrac{x-3}{x- 4} = \pm 5 \Rightarrow x=17/4$ ή $x=23/6$

(v)

$|4x+5|=|8x-3| \Rightarrow \begin{cases} 4x+5=8x-3 \Rightarrow x=2, & \text{Αν τα απόλυτα είναι και τα δύο θετικά ή αρνητικά ταυτόχρονα} \\ 4x+5= - (8x - 3) \Rightarrow x= -1/6, & \text{Αν το ένα απόλυτο είναι θετικό και το άλλο αρνητικό} \end{cases}$

Άρα η λύση είναι $x=2$ ή $x= -1/6$

1.6 (i) $\left|\frac{3-2x}{2+x}\right| \le 4 \Leftrightarrow -4 \le \frac{3-2x}{2+x} \le 4,\ x \ne -2$

<u>1η Περίπτωση :</u>

$x > -2$ δηλ $x+2>0: 3-2x \le 8+4x \Rightarrow x \ge -5/6$

$3-2x \ge -8-4x \Rightarrow x \ge -11/2$

Η λύση δίνεται από την τομή των διαστημάτων $x > -2,\ x \ge -5/6,\ x \ge -11/2$

Δηλαδή $x \ge -5/6$

<u>2η Περίπτωση:</u>

$x<-2$ δηλ $x+2<0: 3-2x \ge 8+4x \Rightarrow x \le -5/6$

$3-2x \le -8-4x \Rightarrow x \le -11/2$

Η λύση δίνεται από την τομή των διαστημάτων $x< -2,\ x \le -5/6,\ x \le -11/2$

Δηλαδή $x \le -11/2$

(ii) $\frac{1}{|x-4|} - \frac{1}{|x+7|} < 0 \Rightarrow \frac{1}{|x-4|} < \frac{1}{|x+7|} \Rightarrow |x+7| < |x-4|$, επειδή $|\alpha| \ge 0$ όπου $x \ne -7, 4$

Υψώνοντας τη ανίσωση στο τετράγωνο έχουμε :

$(x+7)^2 < (x-4)^2 \Rightarrow 14x+49 < -8x+16 \Rightarrow x < -3/2$ αλλά $x \ne -7$

1.7 Με την χρήση της της τριγωνικής ταυτότητας και της τέλειας επαγωγής αποδεικνύεται ότι : $|\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n| \le |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_n|$

(i) $|x^3 - 2x^2 + 3x - 4| \le |x^3| + |-2x^2| + |3x| + |-4| = |x^3| + 2|x^2| + 3|x| + |4|$

$\le 3^3 + 2 * 3^2 + 3 * 3 + 4 = 58$

Επειδή $|x| \le 3$ στο διάστημα [-3,2] που μας ενδιαφέρει . Άρα M=58

(ii) $\left|\frac{x+2}{x} - 5\right| = \left|\frac{x+2-5x}{x}\right| = \left|\frac{2-4x}{x}\right| < \frac{18}{1} = 18$

$|2-4x| \le 2+4|x| \le 2+4\times4 = 18$ διότι $|x| < 4$ *στο* $(1,4)$

$|x| > 1$ στο (1,4) Άρα $\frac{1}{|x|} < 1$

1.8 Θα χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις $y=\lambda x + \gamma$, $y-y_0=\lambda(x-x_0)$

(i) $\lambda= -2$, $\gamma =7$. Άρα $y= -2x + 7$

(ii) A(-1,2) , $3x+2y=5 \Rightarrow$ κλίση$= -\dfrac{3}{2}$. Άρα $\lambda=\dfrac{2}{3}$

Επομένως η ζητούμενη ευθεία είναι η : $2x-3y+8=0$

(iii) Δύο σημεία της ευθείας είναι A(5,0) και B(0,2)

Άρα $\lambda=\dfrac{2-0}{0-5}= -\dfrac{2}{5}$. Επομένως $y-2= -\dfrac{2}{5}(x-0) \Rightarrow 2x+5y-10=0$

(iv) Η ζητούμενη ευθεία είναι παράλληλη με τον άξονα των y και επομένως η εξίσωση της είναι της μορφής $x=\alpha$. Επειδή περνά από το (5,-2) έχουμε $x=5$

(v) Υπάρχουν δύο ευθείες που σχηματίζουν γωνία $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ με την ευθεία $y=3x+4$

Επειδή η ζητούμενη ευθεία περνα από την αρχή των αξόνων έχει εξίσωση της μορφής $y=\lambda x$ όπου λ είναι η κλίση της.

Με την χρήση του τύπου $\tan\varphi=\dfrac{\lambda_1-\lambda_2}{1+\lambda_1\lambda_2}$ έχουμε :

$$\tan\frac{\pi}{4}=\frac{|\lambda-3|}{1+3\lambda} \Rightarrow 1=\frac{|\lambda-3|}{1+3\lambda} \Rightarrow \begin{cases} 1+3\lambda=\lambda-3 \Rightarrow \lambda= -2 \\ \text{ή} \\ 1+3\lambda=3-\lambda \Rightarrow \lambda= \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Άρα οι δύο ζητούμενες ευθείες είναι : $y= -2x$ και $y=\dfrac{1}{2}x$

1.9 $Ax+By+\Gamma=0$, $\lambda= -\dfrac{A}{B}$, τεταγμένη$=-\dfrac{\Gamma}{B}$

$3x+ky- 4=0$

(i) $\lambda=2= -\dfrac{3}{k} \Rightarrow k= -\dfrac{3}{2}$

(ii) τεταγμένη$=\dfrac{4}{k}=5 \Rightarrow k=\dfrac{4}{5}$

(iii) Αντικαθιστούμε το σημείο (-2,4) στην εξίσωση : $3*(-2)+4k=4 \Rightarrow 4k=10 \Rightarrow k=\dfrac{5}{2}$

(iv) Η κλίση της ευθείας $2x-5y=1$ είναι $2/5$ άρα αυτή είναι και η κλίση της ζητούμενης ευθείας αφού είναι παράλληλες. Έτσι έχουμε $-\dfrac{3}{k}=\dfrac{2}{5} \Rightarrow k=-\dfrac{15}{2}$

(v) Η κλίση της ευθείας $4x+3y=2$ είναι $-4/3$. Άρα η κλίση της ζητούμενης ευθείας είναι $3/4$ αφού είναι κάθετες μεταξύ τους. Έτσι έχουμε $-\dfrac{3}{k}=\dfrac{3}{4} \Rightarrow k=-4$

1.10 (α) Θα μετασχηματίσουμε την εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ στην μορφή $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ όπου (x_0,y_0) είναι το κέντρο του κύκλου και r η ακτίνα του.

$$\left(x-\frac{A}{2}\right)^2+\left(y-\frac{B}{2}\right)^2-\frac{A^2}{4}-\frac{B^2}{4}+C=0 \Rightarrow \left(x-\frac{A}{2}\right)^2+\left(y-\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4}$$

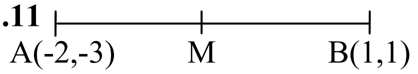
$$\left(x-\frac{A}{2}\right)^2+\left(y-\frac{B}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}\right)^2$$

Άρα $\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ είναι το κέντρο του κύκλου και $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$ η ακτίνα του.

(β) Θα μετασχηματίσουμε την εξίσωση $y=Ax^2+Bx+C$ στην μορφή $y=\alpha(x-x_0)+y_0$ όπου (x_0,y_0) είναι η κορυφή της παραβολής.

$$y=Ax^2+Bx+C \Rightarrow y=A\left(x^2+2\frac{B}{2A}+\frac{B^2}{4A^2}\right)+C-A\frac{B^2}{4A^2} \Rightarrow y=A\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+\left(C-\frac{B^2}{4A}\right)$$

Άρα η κορυφή της παραβολής έχει συντεταγμένες $\left(-\frac{B}{2A},C-\frac{B^2}{4A}\right)$.

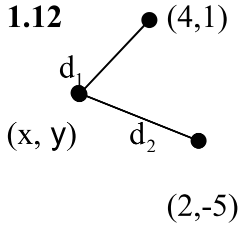
1.11


Το σημείο M έχει συντεταγμένες $x_M=\frac{-2+1}{2}=-\frac{1}{2}$, $y_M=\frac{-3+1}{2}=-1$

Το ευθύγραμμο τμήμα AB έχει κλίση ίση με : $\lambda=\frac{1-(-3)}{1-(-2)}=\frac{4}{3}$.

Άρα η μεσοκάθετος έχει κλίση ίση με $-\frac{3}{4}$ και η αντίστοιχη της εξίσωση είναι

$$y+1=-\frac{3}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right) \Rightarrow y=-\frac{3}{4}x-\frac{11}{8}$$

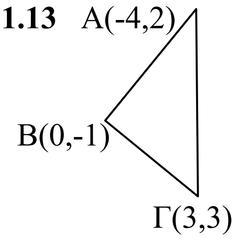
1.12


Γνωρίζουμε ότι $d_1^2+d_2^2=45$.

Άρα $(x-4)^2+(y-1)^2+(x-2)^2+(y+5)^2=45 \Rightarrow$

$x^2+y^2-6x+4y+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=\frac{25}{2}$, η οποία είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο (3,-2) και ακτίνα $5/\sqrt{2}$

1.13



Μήκος της ΑΒ : $\sqrt{(0+4)^2+(-1-2)^2}=5$

Μήκος της ΒΓ : $\sqrt{(3-0)^2+(3+1)^2}=5$

Μήκος της ΓΑ : $\sqrt{(-4-3)^2+(2-3)^2}=5\sqrt{2}$

Παρατηρούμε ότι τα μήκη των πλευρών ικανοποιούν το Πυθαγόρειο Θεώρημα

$5^2+5^2=25+25=50$ και $\left(5\sqrt{2}\right)^2=25*2=50$

Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, επομένως η γωνία $A\hat{B}\Gamma=\frac{\pi}{2}=90^o$.

Επίσης αφού είναι ισοσκελές $\Gamma\hat{A}B=B\hat{\Gamma}A=\frac{\pi}{4}=45^o$

1.14 Έστω ότι η εξίσωση του κύκλου είναι $x^2+y^2+Ax+By+C=0$

Τα σημεία (1,1), (2,0) και (-1,-3) επαληθεύουν την εξίσωση του κύκλου.

Άρα έχουμε το σύστημα :

$A+B+C=-2$

$2A+C=-4$

$-A-3B+C=-10$

Η λύση του συστήματος μας δίνει $A=0$, $B=2$, $C=-4$

Άρα η εξίσωση του κύκλου γράφεται : $x^2+y^2+2y-4=0 \Rightarrow x^2+(y+1)^2=5$

Άρα ο κύκλος έχει κέντρο (0,-1) και ακτίνα $\sqrt{5}$.

1.15 Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών

$2x+3y=13$ και $5x-4y=-2$ είναι η λύση του συστήματος

$$\left.\begin{array}{l}2x+3y=13\\5x-4y=-2\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}8x+12y=52\\15x-12y=-6\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}23x=46\\y=\dfrac{13-2x}{3}\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}x=2\\y=3\end{array}$$

Άρα το σημείο τομής είναι (2,3). Τώρα, κλίση της ευθείας $3y+x=5$ είναι $-\frac{1}{3}$

Άρα η κλίση λ της ζητούμενης ευθείας δίνεται από την σχέση $\lambda\left(-\frac{1}{3}\right)=-1 \Rightarrow \lambda=3$

Άρα η εξίσωση της ευθείας είναι : $y-3=3(x-2) \Rightarrow y=3x-3$