ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ Ι
ΜΑΣ 004
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Τετάρτη 16 Δεκεμβρίου, 1998

---

1 (α). Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$.

(β) Να λυθεί η εξίσωση $|x - 2| = |2x + 1|$.

(γ) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς a για την οποία η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x-a}$ έχει ως αντίστροφη τον εαυτό της.

(δ) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς a έτσι ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο σημείο $x = 0$.

(ε) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των πιο κάτω συναρτήσεων

$$\text{(i)} \ \cosh x, \qquad \text{(ii)} \ \cosh(x+2), \qquad \text{(iii)} \ \cosh x + 2$$

2. Δίνεται η καμπύλη

$$y = \frac{(x-3)^2}{x^2 - 10x + 9}$$

(i) Να βρεθούν το πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών της καμπύλης.
(ii) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της καμπύλης με τους δύο άξονες.
(iii) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι γραμμικές ασύμπτωτες της καμπύλης.
(iv) Να βρεθεί η παράγωγος της καμπύλης και να προσδιοριστούν τα σημεία όπου μηδενίζεται.
(v) Να δειχτεί ότι το σημείο $\left(-3, \frac{3}{4}\right)$ είναι τοπικό ελάχιστο της καμπύλης και να βρεθεί το τοπικό μέγιστό της.
(vi) Να εξεταστεί το πρόσημο της καμπύλης.
(vii) Να γίνει η γραφική παράσταση της καμπύλης.
(viii) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα απόλυτα ακρότατα της καμπύλης στο διάστημα $(1, 9)$.

3(α). Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στη συνάρτηση $f(x) = \ln x$ στο διάστημα $[1, 2]$, ή διαφορετικά, να δειχτεί ότι

$$\frac{1}{2} < \ln 2 < 1.$$

(β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ οι οποίες ικανοποιούν τις συνθήκες:
(i) $f(a+b) = f(a)f(b) - g(a)g(b)$
(ii) $f(0) = 1, \quad g(0) = 0$
(iii) $f'(0) = 0, \quad g'(0) = 1$
Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου να δειχτεί ότι $f'(x) = -g(x)$.

(γ) Να δειχτεί ότι

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \ln\left(1+\mathrm{e}^{x}\right) + c.$$

Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

4 (α). Να δειχτεί ότι

$$\int \ln x \mathrm{d}x = x\ln x - x + c.$$

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\mathrm{d}x.$$

(β) Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2}.$$

(γ) Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x\to 0}\left(\mathrm{e}^{x}+x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

(δ) Δίνεται ότι $I_n = \int_0^1 x^n \cosh x \mathrm{d}x$. Να δειχτεί ότι, για $n \geq 2$,

$$I_n = \sinh 1 - n\cosh 1 + n(n-1)I_{n-2}.$$

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 x^2 \cosh x \mathrm{d}x.$$

5. Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των υπερβολικών συναρτήσεων $\sinh x$ και $\cosh x$ να αποδειχτούν οι ταυτότητες

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad \textit{και} \qquad \cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$$

Αν $\cosh u = \frac{5}{4}$, να βρεθεί η θετική τιμή του u συναρτήσει του φυσικού λογαρίθμου και στη συνέχεια να βρεθούν οι τιμές των συναρτήσεων $\sinh u$, $\sinh 2u$ και $\cosh 2u$.

Εστω το χωρίο R που περικλείεται από την καμπύλη $y = \cosh x$, τους δύο άξονες και την ευθεία $x = \ln 2$.

(i) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου R.
(ii) Να βρεθεί η περίμετρος του χωρίου R.
(iii) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται όταν το χωρίο R περιστραφεί γύρω από την ευθεία $y = -1$.
(iv) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται όταν το χωρίο R περιστραφεί γύρω από την ευθεία $x = \ln 2$.
(v) Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγεται όταν το τόξο της καμπύλης στο διάστημα $[0, \ln 2]$ περιστραφεί γύρω από την ευθεία $y = -1$.

6. Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των υπερβολικών συναρτήσεων να δειχτεί ότι

$$\cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$$

και ότι

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right), \quad \textit{όπου} \;\; |x| < 1.$$

Δίνεται ότι

$$5 \cosh x - 3 \sinh x = R \cosh(x - a),$$

όπου $R > 0$. Να δειχτεί ότι $a = \ln 2$ και να βρεθεί η τιμή του R.

Να λυθεί η εξίσωση

$$5 \cosh x - 3 \sinh x = 5 \sinh(x - \ln 2).$$

Να δειχτεί ότι η μέση τιμή της συνάρτησης

$$y = \frac{1}{5 \cosh x - 3 \sinh x}$$

στο διάστημα $\left[\ln \frac{2}{3}, \ln 4\right]$ είναι ίση με $\frac{\pi}{8 \ln 6}$.

7(α). Εστω η ακολουθία $\{a_n\}$ η οποία ορίζεται από την αναδρομική σχέση

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n}, \quad \text{για} \quad n \geq 1, \quad \text{όπου} \quad a_1 = \sqrt{2}.$$

Δίνεται επίσης ότι $a_n < 2$ για $n \geq 1$.
(i) Να δειχτεί ότι $a_{n+1}^2 - a_n^2 = a_n(2 - a_n)$ για $n \geq 1$.
(ii) Να δειχτεί ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι αύξουσα.
(iii) Να δειχτεί ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει και να βρεθεί το όριό της.

(β) Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι παρακάτω σειρές με τη χρήση του δοσμένου κριτηρίου.

(i) $$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k-1}{2k}\right)^k, \quad \text{κριτήριο απόκλισης}$$

(ii) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k}, \quad \text{κριτήριο του λόγου}$$

(iii) $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k}, \quad \text{κριτήριο της ρίζας}$$

(iv) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^3+k}, \quad \text{κριτήριο σύγκρισης}$$

(v) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin\frac{\pi}{k}, \quad \text{κριτήριο ολοκλήρωσης}$$

ΚΑΛΑ ΧΡΙΣΤΟΥΓΕΝΝΑ

ΚΑΙ

ΕΥΤΥΧΙΣΜΕΝΟΣ Ο

Ο ΚΑΙΝΟΥΡΓΙΟΣ ΧΡΟΝΟΣ 1999!