

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ



ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΜΑΣ 004)

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Δευτέρα 12 Δεκεμβρίου, 2005

1. (α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$.

(β) Να λυθεί η εξίσωση $|8x - 3| = |4x + 5|$.

(γ) Να δειχθεί ότι $\sinh^{-1} x = \ln[x + \sqrt{1 + x^2}]$.

(δ) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 3x}{x^2}, & x < 0 \\ \frac{x^2 + x + k}{3x^2 + 2}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

(i) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς k τέτοια ώστε η f να είναι συνεχής στο σημείο $x = 0$.

(ii) Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. Δίνεται η καμπύλη $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 10}$.

(i) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού και τιμών της καμπύλης.

(ii) Να βρεθούν τα σημεία τομής της καμπύλης με τους δύο άξονες.

(iii) Να βρεθούν οι γραμμικές ασύμπτωτες της καμπύλης.

(iv) Να βρεθεί η παράγωγος της y και να δειχθεί ότι μηδενίζεται στα σημεία $x = \frac{5}{2}$ και $x = 4$.

(v) Να προσδιοριστούν τα τοπικά ακρότατα της καμπύλης.

(vi) Να εξεταστεί το πρόσημο της καμπύλης.

(vii) Να γίνει η γραφική παράσταση της καμπύλης.

(viii) Να γίνει η γραφική παράσταση της καμπύλης $y = \frac{x^2 - 10}{x^2 - 4x + 3}$.

3. (α) Να διατυπωθεί το θεώρημα μέσης τιμής.

Να αποδειχθεί η ταυτότητα $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$.

Να δειχθεί ότι $\frac{d}{dx} (\tanh^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}$.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \tanh^{-1} x$, η οποία ορίζεται στο διάστημα $[0, x]$, όπου $x < 1$. Να δειχθεί ότι

$$x < \tanh^{-1} x < \frac{x}{1-x^2}.$$

(β) Έστω $I_n = \int_0^\pi x^n \sin x dx$, $n \geq 0$. Να αποδειχθεί ότι

$$I_n = \pi^n - n(n-1)I_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi x^4 \sin x dx$.

4. (α) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου, να δειχθεί ότι

$$\frac{d}{dx} (\sin x) = \cos x.$$

(β) Η κλίση μιας καμπύλης σ' ένα οποιοδήποτε σημείο (x, y) δίνεται από την εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4.$$

Να εξεταστεί η καμπύλη ως προς τη μονοτονία και να προσδιοριστούν τί είναι τα σημεία στα οποία μηδενίζεται η κλίση της καμπύλης.

(γ) Να βρεθούν τα απόλυτα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = 4x^3 - 3x^4$ στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$.

5. (α) Να υπολογιστούν με αντικατάσταση, ή διαφορειακά, τα ολοκληρώματα:

(i) $\int_0^{\sqrt{2}} x^2 \sqrt{4-x^2} dx$

(ii) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2 \sqrt{5x^2-4}}$, $x = \frac{1}{\sqrt{u}}$

(iii) $\int_2^4 \sqrt{(4-x)(x-2)} dx$, $x = 3 + \sin \theta$

(β) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς k , για την οποία το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{k}{3x+1} \right) dx$$

συγκλίνει. Για αυτή την τιμή του k να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα.

6. Να αποδειχθεί ότι $\cosh^2 2x = \frac{1}{2}(1 + \cosh 4x)$.

Αν $\sinh u = \frac{4}{3}$, να βρεθεί η τιμή του u συναρτήσει του φυσικού λογαρίθμου και στη συνέχεια να βρεθούν οι τιμές των συναρτήσεων $\sinh 2u$, $\cosh 2u$ και $\sinh 4u$.

Έστω η καμπύλη $y = \frac{1}{2} \cosh 2x$. Να βρεθούν:

(i) το εμβαδόν του χωρίου R , που περικλείεται από την καμπύλη, τους δύο άξονες και την ευθεία $x = \ln 3$,

(ii) ο όγκος του στερεού που παράγεται όταν το χωρίο R περιστραφεί γύρω από τον άξονα των x ,

(iii) το μήκος τόξου L της καμπύλης στο διάστημα $[0, \ln 3]$,

(iv) η περίμετρος του χωρίου R ,

(v) το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγεται όταν το τόξο L περιστραφεί γύρω από τον άξονα των x ,

(vi) η μέση τιμή της καμπύλης στο διάστημα $[0, \ln 3]$.

7. (α) Χρησιμοποιώντας τον τύπο, ή διαφορετικά, να βρεθούν οι πρώτοι τρεις μη-μηδενικοί όροι της σειράς Maclaurin της συνάρτησης $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

Στη συνέχεια να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x^2} \left[\ln \left(\frac{1}{2}(1 + e^{-x}) \right) + \frac{1}{2}x \right] \right\}$.

(β) Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι παρακάτω σειρές με τη χρήση του δοσμένου κριτηρίου:

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k} \right)^k$, κριτήριο απόκλισης

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k k^2}$, κριτήριο του λόγου

(iii) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k}$, κριτήριο της ρίζας

(iv) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^4+k}$, κριτήριο οριακής σύγκρισης

(v) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{k+1}$, κριτήριο ολοκλήρωσης