

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
ΜΑΣ 004

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Παρασκευή 19 Δεκεμβρίου, 2003

Μέρος Α: Να λυθούν όλα τα προβλήματα.

Μέρος Β: Να λυθούν 4 προβλήματα.

Μέρος Α

1. (α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών της συνάρτησης $f(x) = 2 + \sqrt{x^2 - |x|} - 6$.
(β) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς a για την οποία η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x-a}$ έχει ως αντίστροφη τον εαυτό της.

2. Να βρεθεί η $\frac{dy}{dx}$ και η $\frac{d^2y}{dx^2}$ στο σημείο όπου η καμπύλη $x^2 + 4xy + y^2 = 16$ τέμνει το θετικό άξονα των x . Στη συνέχεια να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης της καμπύλης σε αυτό το σημείο.

3. (α) Να δοθεί ο ορισμός της συνέχειας συνάρτησης σε σημείο.
Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς a έτσι ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο σημείο $x = 0$.

(β) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου ναδειχτεί ότι

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x.$$

4. Η κλίση μιας καμπύλης σ' ένα οποιοδήποτε σημείο (x, y) δίνεται από την εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4.$$

Να εξεταστεί η καμπύλη ως προς τη μονοτονία και να προσδιοριστούν τί είναι τα σημεία στα οποία μηδενίζεται η κλίση της καμπύλης.

5. Να διατυπωθεί το θεώρημα μέσης τιμής.

Αν $0 < x < y$, τότε να αποδειχτεί ότι

$$1 - \frac{x}{y} < \ln \frac{y}{x} < \frac{y}{x} - 1.$$

6. Ναδειχτεί ότι $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$, όπου $|x| < 1$.

Ναλυθεί η εξίσωση $9 \tanh^2 x + 3 \tanh x = 2$.

7. Ναυπολογιστούν με αντικατάσταση, ή διαφορετικά, τα ολοκληρώματα:

(i) $\int_2^4 \sqrt{(4-x)(x-2)} dx \quad (x = 3 + \sin \theta)$

(ii) $\int_0^1 x^5 \sqrt{1-x^2} dx$

8. Ναυπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+3} \right)^x$.

Ναυπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$.

Ναεξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές:

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+3} \right)^{k^2}$, (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} k e^{-k^2}$.

Μέρος Β

9. Η καμπύλη $y = \frac{ax^2}{x-b}$ έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x = 2$ και πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 2x + 2$.

(α) Ναβρεθούν οι τιμές των σταθερών a και b .

(β) (i) Ναβρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της καμπύλης με τους δύο άξονες.

(ii) Ναβρεθούν οι ασύμπτωτες της καμπύλης.

(iii) Ναβρεθούν τα ταπικά ακρότατα της καμπύλης.

(iv) Ναεξεταστεί το πρόσημο της καμπύλης.

(v) Χρησιμοποιώντας τα ερωτήματα (i) - (iv), ναγίνει η γραφική παράσταση της καμπύλης.

(γ) Ναβρεθούν τα απόλυτα ακρότατα της καμπύλης στο διάστημα $[\frac{3}{2}, 3]$.

(δ) Χωρίς ναυπολογιστεί το ολοκλήρωμα, ναδειχτεί ότι

$$\int_{\frac{3}{2}}^3 y dx \geq 12.$$

10. Έστω η καμπύλη $y = \frac{2}{\sinh x}$. Να βρεθεί η $\frac{dy}{dx}$ και να αποδειχτεί ότι

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(1 + \frac{2}{\sinh^2 x}\right)^2.$$

Στη συνέχεια να δειχτεί ότι το μήκος της καμπύλης από το σημείο $x = \ln 2$ ως το σημείο $x = \ln 3$ είναι ίσο με $\frac{5}{6} + \ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

Να δειχτεί ότι η μέση τιμή της y στο διάστημα $[\ln 2, \ln 3]$ είναι ίση με

$$\bar{y} = \frac{4}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx.$$

Να υπολογιστεί το πιο πάνω ολοκλήρωμα.

11. (α) Να υπολογιστούν τα πιο κάτω όρια:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x \sin 4x \sin 5x}{x^3} \right), \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{|x - 3|}, \quad (iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos(t^2) dt}{x}.$$

(β) Χρησιμοποιώντας την κατάλληλη αντικατάσταση, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\sqrt{2}} x^2 \sqrt{4 - x^2} dx.$$

(γ) Να δειχτεί ότι $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \ln \frac{a}{b}$, όπου $0 < b < a$.

(δ) Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία της καμπύλης $y = (x^2 - 4)^{1/3}$. Στη συνέχεια να γίνει η γραφική παράσταση της καμπύλης. (Στο διάγραμμα να φαίνονται καθαρά τα κρίσιμα σημεία.)

12. Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των υπερβολικών συναρτήσεων $\sinh x$ και $\cosh x$ να αποδειχτούν οι ταυτότητες

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \text{και} \quad \cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$$

Αν $\cosh u = \frac{5}{4}$, να βρεθεί η θετική τιμή του u συναρτήσει του φυσικού λογαρίθμου και στη συνέχεια να βρεθούν οι τιμές των συναρτήσεων $\sinh u$, $\sinh 2u$ και $\cosh 2u$.

Έστω το χωρίο R που περικλείεται από την καμπύλη $y = \cosh x$, τους δύο άξονες και την ευθεία $x = \ln 2$.

(i) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου R .

(ii) Να βρεθεί η περίμετρος του χωρίου R .

(iii) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται όταν το χωρίο R περιστραφεί γύρω από την ευθεία $y = -1$.

(iv) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται όταν το χωρίο R περιστραφεί γύρω από την ευθεία $x = \ln 2$.

13. Ναδειχτεί ότι η συνάρτηση $y = \ln(e^x + e^{-x})$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0. \quad (1)$$

[Υπόδειξη: $y = \ln(e^x + e^{-x}) \Leftrightarrow e^y = e^x + e^{-x}$]

Να βρεθούν οι τιμές των y , $\frac{dy}{dx}$ και $\frac{d^2y}{dx^2}$ στο σημείο $x = 0$.

Παραγωγίζοντας τη διαφορική εξίσωση (1), να υπολογιστούν οι παράγωγοι $\frac{d^3y}{dx^3}$ και $\frac{d^4y}{dx^4}$ και στη συνέχεια να βρεθούν οι τιμές τους στο σημείο $x = 0$.

Χρησιμοποιώντας τον τύπο της σειράς Maclaurin, ναδειχτεί ότι

$$y = \ln 2 + \frac{1}{2}x^2 + cx^4 + \dots,$$

όπου c είναι σταθερά προς υπολογισμό.

Να βρεθεί ο πρώτος μη-μηδενικός όρος της δυναμοσειράς της συνάρτησης $f(x) = \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2 + x^2}\right)$.

14. Δίνεται ότι

$$I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx,$$

όπου a είναι σταθερά. Ναδειχτεί ότι για $n \geq 2$, ισχύει

$$nI_n = x^{n-1}\sqrt{a^2 + x^2} - (n-1)a^2I_{n-2}.$$

Να βρεθούν οι τιμές των I_2 και I_4 .

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{2x^4 + 3x^2 + 4}{\sqrt{2 + x^2}} dx.$$