ΕΞΕΤΑΣΗ 2 - 24/11/1998

1. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της υπερβολικής συνάρτησης $\cosh x$, να αποδειχτεί η ταυτότητα $\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$.

Αν $x = \ln 3$, να υπολογιστούν οι τιμές των $\sinh x,\ \cosh x,\ \sinh 2x$.

Εστω ότι έχουμε το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $y = \cosh x$ και τις ευθείες $y = 1$ και $x = \ln 3$.

(i) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου.

Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται όταν το χωρίο περιστραφεί γύρω από

(ii) τον άξονα των x,

(iii) την ευθεία $y = 1$,

(iv) την ευθεία $y = \frac{5}{3}$.

2. Να αποδειχτεί ότι

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Να αποδειχτεί ότι

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sinh^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Να δειχτεί ότι η συνάρτηση $y = \frac{\sinh^{-1} x}{\sqrt{1+x^2}}$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\left(1+x^2\right)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 3x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 0.$$

Να λυθεί η εξίσωση $12\cosh^2 x = 25\sinh x$.

3(α). Να υπολογιστεί γεωμετρικώς το ολοκλήρωμα $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x$.

(β). Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{-2}^3 \sqrt{3+|x|}\mathrm{d}x$.

(γ). Να βρεθεί η μέση τιμή της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ στο διάστημα $[0,4]$.

(δ). Δίνεται ότι $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x = 5$. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(3x+1)\mathrm{d}x$.

(ε). Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $y = \int_0^x (t^2 - 6t + 8)\mathrm{d}t$.

4. Να υπολογιστούν με αντικατάσταση, ή διαφορετικά, τα ολοκληρώματα:

(i) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x + 4\sin^2 x} \quad (u = \tan x)$ (ii) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x} \quad \left(u = \tan\frac{x}{2}\right)$

(iii) $\displaystyle\int_2^4 \sqrt{(4-x)(x-2)}\,\mathrm{d}x \quad (x = 3 + \sin\theta)$ (iv) $\displaystyle\int_0^1 x^5\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

5. Δίνεται η συνάρτηση $y = \mathrm{e}^x(\sin x - \cos x)$ να δειχτεί ότι $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\mathrm{e}^x \sin x$.
Δίνεται ότι

$$\mathbf{I}_n = \int \mathrm{e}^x \sin^n x\,\mathrm{d}x, \quad n \geq 2,$$

Να αποδειχτεί ότι

$$\left(n^2+1\right)\mathbf{I}_n = \mathrm{e}^x \sin^{n-1} x(\sin x - n\cos x) + n(n-1)\mathbf{I}_{n-2}.$$

Να υπολογιστεί το $\mathbf{I}_3$.
Να δειχτεί ότι

$$\int \mathrm{e}^x \sin 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\mathrm{e}^x\left(3\sin x - 3\cos x - 4\sin^3 x + 12\sin^2 x\cos x\right) + c.$$

[**Υπόδειξη**: $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$]