

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ



ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΜΑΣ 004)

ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Σάββατο 26 Νοεμβρίου, 2005

1. (α) Να υπολογιστεί γεωμετρικώς το ολοκλήρωμα $\int_0^4 \sqrt{8x - x^2} dx$.

(β) Αν η $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση και ισχύει $x^2 \leq f(x) \leq 6$, $\forall x \in [-1, 2]$, να βρεθούν οι τιμές των σταθερών A και B τέτοιες ώστε

$$A \leq \int_{-1}^2 f(x) dx \leq B.$$

2. Να αποδειχθεί η ταυτότητα

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

Δίνεται η σχέση $5 \cosh x - 4 \sinh x = R \cosh(x - a)$. Να βρεθούν οι τιμές των σταθερών a και R . Στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση

$$5 \cosh x - 4 \sinh x = 5 \sinh(x - \ln 3).$$

3. Να δειχθεί ότι

$$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + c.$$

Έστω $I_n = \int \sec^n x dx$. Να δειχθεί ότι

$$(n-1)I_n = \tan x \sec^{n-2} x + (n-2)I_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

[Υπόδειξη: $\sec^n x = \sec^{n-2} x \sec^2 x$, $\tan^2 x \sec^{n-2} x = \tan x \tan x \sec x \sec^{n-3} x$ και $\frac{d}{dx}(\sec x) = \tan x \sec x$]

Στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \sec^3 x dx.$$

4. Έστω το χωρίο που περικλείεται μεταξύ των καμπυλών $y = x^2$ και $y = x$.

(i) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου.

Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται όταν το χωρίο περιστραφεί γύρω από

(ii) τον άξονα των x

(iii) τον άξονα των y

(iv) την ευθεία $y = 2$.

5. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

(i) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} d\theta$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sin 2x dx$

(iii) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

(iv) $\int \frac{dx}{x^3 + x}$

6. (α) Να βρεθεί το μήκος τόξου της καμπύλης $y = \ln(\sec x)$ από $x = 0$ ως $x = \frac{\pi}{4}$.

(β) Χρησιμοποιώντας την κατάλληλη αντικατάσταση να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx.$$

7. (α) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα των x και την καμπύλη $y = x^{-\frac{1}{3}}$ στο διάστημα $[0, 1]$. Στη συνέχεια να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται όταν το χωρίο περιστραφεί γύρω από τον άξονα των x .

(β) Να υπολογιστούν τα όρια:

(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x-2} \right)^x$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$

8. (α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = \frac{1}{x}$, ναδειχθεί ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = 0.$$

(β) Να βρεθούν οι τιμές της σταθεράς n για τις οποίες το ολοκλήρωμα

$$\int_e^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^n} dx$$

συγκλίνει και να βρεθεί η τιμή του ολοκληρώματος για αυτές τις τιμές.