

ΕΞΕΤΑΣΗ 1 - 27/10/1998

1.(α) Να δοθεί ο ορισμός της συνέχειας συνάρτησης.
Εστω ότι $f(-2) = -1$, $f(-1) = 0$, $f(1) = 1$ και ότι

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}, \quad \text{όταν } x \neq -2, -1, 1$$

Να εξεταστεί ως προς την συνέχεια η συνάρτηση $f(x)$.

(β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ οι οποίες ικανοποιούν τις συνθήκες:

(i) $f(a + b) = f(a)g(b) + f(b)g(a)$,

(ii) $f(0) = 0$, $g(0) = 1$,

(iii) $f'(0) = 1$, $g'(0) = 0$.

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου ναδειχτεί ότι $f'(x) = g(x)$.

2. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2 + x + 1}.$$

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης $f(x)$.

Αφού βρεθούν οι γραμμικές ασύμπτωτες και τα τοπικά ακρότατα της καμπύλης $y = f(x)$, να γίνει η γραφική της παράσταση.

Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα απόλυτα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)$.

3.(α) Να υπολογιστούν τα πιο κάτω όρια (χωρίς τη χρήση του κανόνα De L' Hospital).

$$(i) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x} \quad (iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin(2x)}{x} \quad (iv) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(3+h)^2} - e^9}{h}$$

(β) Να δοθεί ο ορισμός της αντίστροφης συνάρτησης.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 + e^{-x}$ με $x \in (-\infty, +\infty)$ και $g(x) = \ln(3x - 5)$ με $x \geq 2$.

(i) Να βρεθεί το πεδίο τιμών των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$.

(ii) Να βρεθεί η σύνθεση $(f \circ g)(x)$ και να προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού της.

(iii) Να βρεθεί η αντίστροφη $f^{-1}(x)$ και να προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού της.

4. (α) Να γίνουν τα διαγράμματα των πιο κάτω συναρτήσεων:

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} y = e^x & \text{(ii)} y = e^{-x} & \text{(iii)} y = -e^{-x} \\ \text{(iv)} y = e^{|x|} & \text{(v)} y = e^{x+1} & \text{(vi)} y = e^x + 1 \end{array}$$

(β) Να διατυπωθεί το θεώρημα μέσης τιμής.

Να αποδειχτεί ότι

$$\frac{d}{dx} (\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Να αποδειχτεί ότι

$$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x,$$

όπου $x > 0$.

5.(α) Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \sin^{-1} x$.

Αν $y = (x+2)\sqrt{1-x^2} + (2x+1)\sin^{-1} x$, να δειχτεί ότι

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

(β) Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία της καμπύλης $y = (x^2 - 4)^{1/3}$. Στη συνέχεια να γίνει η γραφική παράσταση της καμπύλης. (Στο διάγραμμα να φαίνονται καθαρά τα κρίσιμα σημεία.)