

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ



ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΜΑΣ 004)

ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Σάββατο 22 Οκτωβρίου, 2005

-
1. (α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \ln(2 - |x|)$.
(β) Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - 8|x| + 15 = 0$.
(γ) Να λυθεί η ανίσωση $\left| \frac{x+2}{3-2x} \right| \leq 1$.
(δ) Να βρεθεί η κορυφή της παραβολής $y = x^2 - 4x + 6$ και στη συνέχεια να γίνει η γραφική της παράσταση.
(ε) Να βρεθεί το πεδίο τιμών της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 4x + 6$.

2. (α) Να υπολογιστούν (αν υπάρχουν) τα όρια (χωρίς τη χρήση του κανόνα De L' Hopital):

$$(i) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}, \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}, \quad (iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 8x}.$$

- (β) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνέχειας, να βρεθούν οι τιμές των σταθερών a και b για τις οποίες η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} ax - b, & x < 1 \\ 5, & x = 1 \\ 2ax + b, & x > 1 \end{cases}$$

είναι συνεχής.

3. (α) Να δοθεί ο ορισμός της αντίστροφης συνάρτησης.

Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς a για την οποία η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x-a}$ έχει ως αντίστροφη τον εαυτό της.

- (β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 + e^{-x}$ με $x \in (-\infty, +\infty)$ και $g(x) = \ln(3x - 5)$ με $x \geq 2$.

- (i) Να βρεθεί το πεδίο τιμών των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$.
(ii) Να βρεθεί η σύνθεση $(f \circ g)(x)$ και να προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού της.
(iii) Να βρεθεί η αντίστροφη $f^{-1}(x)$ και να προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού της.

4. (α) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου, ναδειχθεί ότι

$$(i) \quad \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{f(x)} \right] = -\frac{1}{f^2(x)} \frac{df}{dx}$$

$$(ii) \quad \frac{d}{dx} [f(x)g(x)] = g(x) \frac{df}{dx} + f(x) \frac{dg}{dx}$$

Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω αποτελέσματα ναδειχθεί ότι

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{g(x) \frac{df}{dx} - f(x) \frac{dg}{dx}}{g^2(x)}$$

(β) Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 - 20x^3$.
Ναδειχθεί ότι η $f(x)$ δεν έχει απόλυτα ακρότατα.

5. (α) Να διατυπωθεί το θεώρημα μέσης τιμής.

Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{d}{dx} (\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x,$$

όπου $x > 0$.

(β) Ναδειχθεί ότι $x < \tan x$ όταν $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

6. (α) Έστω η συνάρτηση $f(x) = (x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}$.

Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία και τα σημεία καμπής της $y = f(x)$.

Να γίνει η γραφική παράσταση της $y = f(x)$.

(β) Αν $y = [\cos^{-1}(x)]^2$, όπου $-1 < x < 1$, τότε ναδειχθεί ότι

$$(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - 2 = 0.$$

7. Έστω η καμπύλη $y = \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2}$. Αφού βρεθούν τα σημεία τομής με τους άξονες, οι γραμμικές ασύμπτωτες και τα τοπικά ακρότατα, να γίνει η γραφική παράσταση της καμπύλης.

Να γίνει η γραφική παράσταση της $y = \frac{x^2}{2x^3 + x^2 + 1}$.

8. (α) Να βρεθεί το σημείο της καμπύλης $2y^2 = 5(x+1)$ το οποίο είναι το πλησιέστερο στην αρχή των αξόνων.

(β) Να βρεθούν τα απόλυτα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$ στο διάστημα $[-1, 1]$.