

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ**  
**ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**  
**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι**  
**ΜΑΣ 004**  
**ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΕΞΕΤΑΣΗ**

Σάββατο 8 Νοεμβρίου, 2003

**Μέρος Α:** Να λυθούν όλα τα προβλήματα.

**Μέρος Β:** Να λυθούν δύο προβλήματα.

---

**Μέρος Α**

1. (α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f(x) = \sqrt{4 + |x|}$ .

(β) Να λυθεί η εξίσωση  $x^2 - 6|x| + 8 = 0$ .

(γ) Να λυθεί η ανίσωση  $\left| \frac{3 - 2x}{x + 2} \right| \leq 1$ .

2. (α) Εστω οι συναρτήσεις  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = \sin x$  και  $h(x) = \cos x$ . Να αποδειχτεί ότι

$$(f \circ h)(x) - (f \circ g)(x) = h(2x).$$

(β) Να βρεθεί το πεδίο τιμών της  $f(x) = x^2 - 4x + 8$ .

(γ) Εστω  $f(x) = \sin x$ . Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις: (i)  $y = f(x) + 2$  (ii)  $y = f(x + 2)$  (iii)  $y = f(2x)$  στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ .

3. Να υπολογιστούν τα όρια (χωρίς τη χρήση του κανόνα De L' Hopital):

$$(i) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{9 - x}{3 - \sqrt{x}} \quad (iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$$

4. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνέχειας, να βρεθούν οι τιμές των σταθερών  $a$  και  $b$  για τις οποίες η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \leq 1 \\ ax + b + \ln x, & 1 < x < 2 \\ \ln x, & x \geq 2 \end{cases}$$

είναι συνεχής.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x)$  και  $g(x)$  οι οποίες ικανοποιούν τις συνθήκες

(i)  $f(a + b) = f(a)g(b) + f(b)g(a)$

(ii)  $f(0) = 0$ ,  $g(0) = 1$

(iii)  $f'(0) = 1$ ,  $g'(0) = 0$

Να δειχτεί ότι  $f'(x) = g(x)$ .

[**Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί ο ορισμός της παραγώγου.]

6. Δίνεται η συνάρτηση  $L(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ ,  $x > 0$ . Χωρίς να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα, να αποδειχτεί ότι η  $L(x)$  είναι αύξουσα και ότι

$$\int_a^{ax} \frac{1}{t} dt = L(x), \quad a > 0. \quad (1)$$

[Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί ο κανόνας αλυσίδας.]

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1), να αποδειχτεί ότι

$$L(xy) = L(x) + L(y).$$

7. Να διατυπωθεί το θεώρημα μέσης τιμής.

Να δειχτεί ότι

$$\frac{d}{dx} (\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Στη συνέχεια να αποδειχτεί ότι, για  $x > 0$  ισχύει

$$\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} < \sinh^{-1} x < x.$$

8. Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης  $f(x) = \tanh^{-1} x$ , όπου  $|x| < 1$ .

Στη συνέχεια να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$(i) \int \frac{x dx}{1 - x^4} \quad (ii) \int \frac{dx}{(1 - x^2) \tanh^{-1} x}$$

## Μέρος Β

9. Δίνεται η καμπύλη  $y = \frac{x - 1}{(x + 1)^2}$ .

(i) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της καμπύλης με τους δύο άξονες.

(ii) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι ασύμπτωτες της καμπύλης.

(iii) Να εξεταστεί η μονοτονία της και να προσδιοριστούν (αν υπάρχουν) τα τοπικά ακρότατα της καμπύλης.

(iv) Να εξεταστεί το πρόσημο της καμπύλης.

(v) Χρησιμοποιώντας τα ερωτήματα (i) - (iv), να γίνει η γραφική παράσταση της καμπύλης.

(vi) Να βρεθούν τα απόλυτα ακρότατα της καμπύλης στο διάστημα  $[2, 4]$ .

(vii) Να δειχτεί ότι

$$\frac{2}{9} \leq \int_2^4 y dx \leq \frac{1}{4}.$$

(viii) Να γίνει η γραφική παράσταση της καμπύλης  $y = \frac{(x + 1)^2}{(x - 1)}$ .

10. Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των υπερβολικών συναρτήσεων, ναδειχτεί ότι

$$\cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$$

και ότι

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right), \quad \text{όπου } |x| < 1.$$

Δίνεται ότι  $5 \cosh x - 3 \sinh x = R \cosh(x - a)$ , όπου  $R > 0$ . Ναδειχτεί ότι  $a = \ln 2$  και να βρεθεί η τιμή του  $R$ .

Ναλυθεί η εξίσωση  $5 \cosh x - 3 \sinh x = 5 \sinh(x - \ln 2)$ .

Να βρεθεί η μέση τιμή της συνάρτησης  $y = \frac{1}{5 \cosh x - 3 \sinh x}$  στο διάστημα  $[\ln \frac{2}{3}, \ln 4]$ .

11. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x-2}.$$

(i) Ναδοθεί το πεδίο ορισμού της  $f(x)$ .

(ii) Να βρεθούν οι τιμές του  $x$  για τις οποίες  $f(x) > 0$ .

(iii) Ναδειχτεί ότι το πεδίο τιμών της  $f(x)$  είναι  $(-\infty, z_1] \cup [z_2, +\infty)$ , όπου  $z_1$  και  $z_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $z^2 + 6z + 1 = 0$ .

(iv) Μια ευθεία παράλληλη με τον άξονα των  $x$  τέμνει την καμπύλη  $y = f(x)$  σε δύο διαφορετικά σημεία Α και Β. Δίνεται ότι οι τετμημένες των σημείων Α και Β είναι  $a$  και  $b$ , αντίστοιχα. Ναδειχτεί ότι

$$(a-1)(b-1) = 2.$$

12. (i) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $\tan x$  και  $\tan^{-1} x$ .

(ii) Ναδειχτεί ότι  $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

(iii) Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης  $y = \tan^{-1}(1+x^2)$ .

(iv) Να αποδειχτεί η ταυτότητα  $\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x-y}{1+xy}$ .

(v) Ναλυθεί η εξίσωση  $\tan^{-1} 2 - \tan^{-1} \frac{1}{2} = \cos^{-1} x$ .

(vi) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη  $y = \frac{1}{1+x^2}$  και τον άξονα των  $x$  στο διάστημα  $[\frac{1}{3}, 2]$ .

(vii) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $\int \frac{\cos \theta}{2+2 \sin \theta + \sin^2 \theta} d\theta$ .