9. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

9.1 Εμβαδό οριζόμενο από συνάρτηση

Θα υπολογίσουμε το εμβαδό Ε του χωρίου που περικλείεται από το διάγραμμα της f, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=a$ και $x=b$. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

(i) $f(x)\geq 0, \quad \forall x\in[a,b]$ τότε $E=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

(ii) $f(x)\leq 0, \quad \forall x\in[a,b]$ τότε $E=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

(iii) Η f δεν έχει σταθερό πρόσημο στο $[a,b]$. Χωρίζουμε το $[a,b]$ σε υποδιαστήματα στα οποία η f έχει το ίδιο πρόσημο και υπολογίζουμε τα αντίστοιχα εμβαδά.

Παράδειγμα: Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από το διάγραμμα της $y=3x^2+2$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=1$ και $x=3$.

Παράδειγμα: Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από το διάγραμμα της $y=x^2-3x-10$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=-3$ και $x=8$.

9.2 Εμβαδό χωρίου που ορίζεται από δύο συναρτήσεις

Αν f και g είναι συνεχείς στο $[a, b]$ και $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a, b]$, τότε το εμβαδό του χωρίου που περικείεται από τα διαγράμματα των f και g και τις ευθείες $x = a$ και $x = b$ είναι ίσο με

$$E = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, \mathrm{d}x.$$

Σημείωση: Στο σχήμα 1 οι συναρτήσεις f και g είναι θετικές. Ο πιο πάνω τύπος ισχύει και όταν η f ή g ή και οι δύο είναι αρνητικές (σχήμα 2).

Παράδειγμα: Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x$, $y = 4x$ και $y = -x + 2$.

9.3 Ογκος στερεών εκ περιστροφής

Στο σχήμα (α) θεωρούμε το διάγραμμα της συνάρτησης f, που είναι συνεχής στο $[a, b]$. Η περιστροφή του διαγράμματος της $y = f(x)$ γύρω από τον άξονα των x ορίζει ένα στερεό εκ περιστροφής (σχήμα (β)). Θα υπολογίσουμε τον όγκο του. Η τομή αυτού του στερεού στο σημείο $x \in [a, b]$ είναι κυκλικός δίσκος με ακτίνα $f(x)$ και επομένως έχει εμβαδόν ίσο με $\pi[f(x)]^2$. Αρα ο όγκος του στερεού είναι ίσος με

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \mathrm{d}x.$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από τη περιστροφή γύρω από τον άξονα των x του χωρίου που περικλείεται

(i) από την $y = x^2,\ y = 0$ και $x = 1$

(ii) από την $y = 1 + x^3,\ y = 0,\ x = 1$ και $x = 2$.

Εστω δύο συναρτήσεις f και g όπου $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a, b]$ (σχήμα (γ)). Γενικά, αν το χωρίο που περικλείεται από τα διαγράμματα των f και g και τις ευθείες $x = a$ και $x = b$ περιστραφεί γύρω από τον άξονα των x θα ορίσει ένα στερεό εκ περιστροφής (σχήμα (δ)).

Η τομή αυτού του στερεού στο σημείο $x \in [a, b]$ είναι κυκλικός δακτύλιος με εξωτερική ακτίνα ίση με f και εσωτερική ίση με g και επομένως έχει εμβαδόν ίσο με $\pi\left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right)$. Αρα ο όγκος του στερεού είναι ίσος με

$$V = \pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right) \mathrm{d}x.$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από τη περιστροφή γύρω από τον άξονα των x του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες
(i) $y = x^2$ και $y = x$
(ii) $y = x^2 + 1$ και $y = x + 3$
(iii) $y = -x^2 + 3$ και $y = 2|x|$

9.4 Ογκος από κυλινδρικά κελύφη

Το κυλινδρικό κέλυφος είναι το στερεό που περικείεται από δύο κυλίνδρους.

Αν r_1 είναι η εξωτερική ακτίνα, r_2 είναι η εσωτερική και h είναι το ύψος του, τότε ο όγκος του είναι ίσος με

$$V = \pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h = \pi h (r_1^2 - r_2^2) = 2\pi h \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) (r_1 - r_2)$$

Αρα

$$V = 2\pi h \bar{r} \Delta r,$$

όπου $\bar{r}$ είναι η μέση ακτίνα και Δr η διαφορά των ακτίνων.

Η περιστροφή του χωρίου στο πιο πάνω σχήμα γύρω από τον άξονα των y ορίζει ένα στερεό εκ περιστροφής το οποίο έχει όγκο ίσο με

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) \mathrm{d}x.$$

Αυτός ο τύπος μπορεί να γενικευτεί, όπως για παράδειγμα, στην περίπτωση όπου το χωρίο περικλείεται από δύο καμπύλες.

Παράδειγμα: Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα των y του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες:

(i) $y = x^3,\ y = 0,\ x = 1$

(ii) $y = \frac{1}{x},\ y = 0,\ x = 1,\ x = 3$

(iii) $y = 2x - 1,\ y = -2x + 3,\ x = 2$

(iv) $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ x = 4$

9.5 Μήκος τόξου

Ορισμός: Αν η f' είναι συνεχής σε ένα διάστημα, θα λέμε ότι η $y = f(x)$ είναι μια **ομαλή καμπύλη** και η f είναι μια **ομαλή συνάρτηση**.

Αν η f είναι μια ομαλή συνάρτηση στο $[a, b]$, τότε το μήκος τόξου L της καμπύλης $y = f(x)$ από το $x = a$ στο $x = b$ δίνεται από τον τύπο

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x.$$

Στην περίπτωση όπου η καμπύλη ορίζεται παραμετρικά, δηλαδή $y = y(t)$ και $x = x(t)$, τότε ο πιο πανω τύπος γράφεται

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί το μήκος τόξου της καμπύλης

(i) $y = 3x^{3/2} - 1$ από $x = 0$ ως $x = 1$

(ii) $y = \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{6}x^{-3}$ από $x = 1$ ως $x = 2$

9.6 Εμβαδόν επιφάνειας εκ περιστροφής

Εστω ότι η $f \geq 0$ είναι ομαλή συνάρτηση στο διάστημα $[a, b]$. Τότε το εμβαδό της επιφάνειας που παράγει το τόξο L της καμπύλης $y = f(x)$ από το σημείο $x = a$ στο $x = b$ (ή από το $y = c$ στο $y = d$) όταν περιστραφεί γύρω από τον άξονα των x δίνεται από τους τύπους:

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x = 2\pi \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\mathrm{d}y.$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί το εμβαδό της επιφάνειας που παράγεται από την πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των x των τόξων των παρακάτω καμπυλών:
(i) $y = \sqrt{4 - x^2}$ από $x = -1$ ως $x = 1$
(ii) $y = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x^{3/2}$ από $x = 1$ ως $x = 3$.

9.7 Ευθύγραμμη κίνηση

Ενα σωματίδιο κινείται πάνω σ' ένα ευθύγραμμο τμήμα. Η συντεταγμένη s του σωματιδίου (δηλαδή, η απόσταση του από μια αρχή) θα μεταβάλλεται ως μια συνάρτηση του χρόνου. Η συνάρτηση $s(t)$ καλείται **συνάρτηση θέσης**.

Ορισμός: Αν $s(t)$ είναι η συνάρτηση θέσης ενός σωματιδίου που κινείται πάνω σε ευθύγραμμο τμήμα, τότε η **στιγμιαία ταχύτητα** σε χρόνο t ορίζεται ως

$$v(t) = s'(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

και η **στιγμιαία επιτάχυνση** σε χρόνο t ορίζεται ως

$$a(t) = v'(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

Επειδή $v(t) = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, η στιγμιαία επιτάχυνση γράφεται

$$a(t) = s''(t) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}.$$

Αν $v(t) > 0$, τότε η $s(t)$ αυξάνεται (σχήμα α).
Αν $v(t) < 0$, τότε η $s(t)$ φθίνεται (σχήμα β).

Από τους πιο πάνω τύπους επίσης έχουμε

$$s(t) = \int v(t)\mathrm{d}t \quad \text{και} \quad v(t) = \int a(t)\mathrm{d}t.$$

Παράδειγμα: Αν $s(t) = t^3 - 6t^2 + 1$, να βρεθεί η $v(t)$ και η $a(t)$.

Παράδειγμα: Αν $s(t) = t^3 - 6t$, να βρεθούν οι τιμές των $s(t),\ v(t)$ και $a(t)$, όταν $t = 0,\ t = 1,\ t = 2$.

Παράδειγμα: Αν $s(t) = 5t^2 - 22t$, να βρεθεί η μέγιστη ταχύτητα στο χρονικό διάστημα $1 \leq t \leq 3$.

Παράδειγμα: Να γίνει περιγραφή της κίνησης του σωματιδίου που έχει συνάρτηση θέσης $s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$.

Παράδειγμα: Εστω $s(t) = t^3 - 6t + 1$.

(i) Να βρεθούν οι τιμές των s και v όταν $a = 0$.

(ii) Να βρεθούν οι τιμές των s και a όταν $v = 0$.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η συνάρτηση θέσης όταν
(i) $v(t) = t^3 - 2t^2 + 1, \quad s(0) = 0.$
(ii) $a(t) = (2t+3)^{-1/2}, \quad v(3) = 1,\ s(3) = 0.$

Παράδειγμα: Ενα σωματίδιο κινείται πάνω σε ευθεία γραμμή με $a = 3\mathrm{m}/\mathrm{sec}^2$. Να βρεθεί η αρχική ταχύτητα αν το σωματίδιο έχει καλύψει απόσταση 40m στα πρώτα 4 sec.

Κατακόρυφη κίνηση

Υποθέτουμε ότι η κίνηση προς τα πάνω είναι θετική. Οταν $t = 0$ έχουμε $s = s_0$ και $v = v_0$. Τώρα,

$$a(t) = -g$$

όπου g (σταθερά $\approx 9,81\ \mathrm{m/sec^2}$) είναι η **επιτάχυνση της βαρύτητας**. Επειδή $v = \int a\mathrm{d}t$, βρίσκουμε $v = -gt+c$. Επειδή $v(0) = v_0$ έχουμε $c = v_0$ και επομένως

$$v = -gt + v_0.$$

Επίσης $s(t) = \int v(t)\mathrm{d}t = \int(-gt + v_0)\mathrm{d}t$. Αρα $s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + k$. Επειδή $s(0) = s_0$, βρίσκουμε $k = s_0$ και επομένως

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0.$$

Παράδειγμα: Μια σφαίρα ρίχνεται προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα 96 m/sec από ύψος 112m .

(i) Να βρεθεί ο χρόνος που θα χρειαστεί η σφαίρα μέχρι να κτυπήσει το έδαφος.

(ii) Να βρεθεί η ταχύτητα κατά τη σύγκρουση με το έδαφος.

Παράδειγμα: Μια σφαίρα ρίχνεται προς τα πάνω από το έδαφος και ανεβαίνει σε ύψος 1000m. Να βρεθεί η αρχική ταχύτητα της σφαίρας.