8 ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

8.1 Εισαγωγή

Γενικά υπάρχουν 4 μέθοδοι ολοκλήρωσης:

(α) Χρήση τύπων

(β) Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

(γ) Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

(δ) Ανάλυση σε μερικά κλάσματα (ρητές αλγεβρικές συναρτήσεις)

Οι μέθοδοι θα εξεταστούν σε αυτό το κεφάλαιο.

8.2 Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Αν $f(x)$ και $g(x)$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Ολοκληρώνουμε για να βρούμε

$$fg = \int f'g\mathrm{d}x + \int fg'\mathrm{d}x$$

Αυτή η σχέση χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί το ένα από τα δύο ολοκληρώματα, αν είναι γνωστό το άλλο. Δηλαδή,

$$\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

Η εφαρμογή αυτού του τύπου καλείται **ολοκλήρωση κατά παράγοντες**. Αν θέσουμε

$$\begin{aligned} u = g(x) &\Rightarrow \mathrm{d}u = g'(x)\mathrm{d}x \\ v = f(x) &\Rightarrow \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

ο πιο πάνω τύπος παίρνει τη μορφή

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.$$

Παράδειγμα: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

(i) $\int \frac{\log x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

(ii) $\int x\tan^2 x\mathrm{d}x$

(iii) $\int \sqrt{x}\tan^{-1}\sqrt{x}\mathrm{d}x$

Αναγωγικοί τύποι: Εστω το ολοκλήρωμα

$$I_n = \int x^n \mathrm{e}^x \mathrm{d}x, \quad n \geq 0.$$

Ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες

$$\begin{aligned} I_n &= x^n \mathrm{e}^x - n \int x^{n-1} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x \Rightarrow \\ I_n &= x^n \mathrm{e}^x - n I_{n-1} \end{aligned}$$

Αυτός ο τύπος συνδέει το I_n με το I_{n-1}, το I_{n-1} με το I_{n-2} κοκ. Δηλαδή, γνωρίζοντας το I_0, αναγωγικά βρίσκουμε το I_n. Τέτοιοι τύποι καλούνται **αναγωγικοί**. Για παράδειγμα, αν $n = 4$

$$\begin{aligned} I_4 &= x^4 \mathrm{e}^x - 4I_3 \\ I_3 &= x^3 \mathrm{e}^x - 3I_2 \\ I_2 &= x^2 \mathrm{e}^x - 2I_1 \\ I_1 &= x \mathrm{e}^x - I_0 \end{aligned}$$

Τώρα,

$$I_0 = \int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c$$

Επομένως

$$\begin{aligned} I_1 &= x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + c_1 \\ I_2 &= x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + c_2 \\ I_3 &= x^3\mathrm{e}^x - 3x^2\mathrm{e}^x + 6x\mathrm{e}^x - 6\mathrm{e}^x + c_3 \\ I_4 &= \int x^4 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24)\mathrm{e}^x + c_4 \end{aligned}$$

Παράδειγμα: Εστω ότι $I_n = \int \cos^n x \mathrm{d}x$. Να δειχτεί ότι

$$I_n = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

8.3 Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Αρκετές φορές ο υπολογισμός ενός ολοκληρώματος μπορεί να γίνει πιο εύκολος με αλλαγή της μεταβλητής του ολοκληρώματος. Συγκεκριμένα, κάνοντας την κατάλληλη αντικατάσταση, χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\int \left(f(u) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \right) \mathrm{d}x = \int f(u) \mathrm{d}u$$

Αλγεβρική αντικατάσταση

Παράδειγμα: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

(i) $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$

(ii) $\int \sqrt{x^3 - 4} x^5 \mathrm{d}x$

(iii) $\int \frac{x}{(x+1)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}x$

Τριγωνομετρική και υπερβολική αντικατάσταση

Ολοκληρώματα που περιέχουν παραστάσεις των μορφών $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$ και $\sqrt{a^2-x^2}$ μπορούν να υπολογιστούν με τη χρήση τριγωνομετρικών και υπερβολικών αντικαταστάσεων. Οι παραστάσεις που προκύπτουν απλοποιούνται με την εφαρμογή των τριγωνομετρικών τύπων

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \acute{\eta} \quad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

ή των υπερβολικών τύπων

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad \acute{\eta} \quad 1 - \tanh^2 x = \mathrm{sech}^2 x.$$

Για παράδειγμα, αν θέσουμε $x = 2\tan\theta$, $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, στην παράσταση $\sqrt{4+x^2}$ βρίσκουμε

$$\sqrt{4+x^2} = \sqrt{4+4\tan^2\theta} = \sqrt{4(1+\tan^2\theta)} = 2\sqrt{\sec^2\theta} = 2\sec\theta.$$

Διαφορετικά, αν θέσουμε $x = 2\sinh u$ βρίσκουμε

$$\sqrt{4+x^2} = \sqrt{4+4\sinh^2 u} = \sqrt{4(1+\sinh^2 u)} = 2\cosh u.$$

Γενικά, έχουμε τις πιο κάτω αντικαταστάσεις:

Παράσταση	Αντικατάσταση	Περιορισμός στο θ ή u
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\sin\theta$	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
	ή	
	$x = a\tanh u$	$-\infty < u < +\infty$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a\sinh u$	$-\infty < u < +\infty$
	ή	
	$x = a\tan\theta$	$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\cosh u$	$u \geq 0$
	ή	
	$x = \sec\theta$	$\begin{cases} 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, & \alpha\nu\ x \geq a \\ \pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}, & \alpha\nu\ x \leq -a \end{cases}$

Παράδειγμα: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

(i) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{4+x^2}}$

(ii) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}\mathrm{d}x$

(iii) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{9+4x^2}}$

Ολοκληρώματα της μορφής $ax^2 + bx + c$

Ολοκληρώματα με παραστάσεις της μορφής $ax^2 + bx + c$, όπου $a \neq 0,\ b \neq 0$, μπορούν να υπολογιστούν αφού πρώτα η παράσταση γραφεί ως άθροισμα ή διαφορά τετραγώνων ή ως τέλειον τετράγωνο και στη συνέχεια να χρησιμοποιηθεί η κατάλληλη αντικατάσταση.

Παράδειγμα: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

(i) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x - x^2}}$

(ii) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 + 6x + 10}\mathrm{d}x$

(iii) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x(4 - x)}\mathrm{d}x$

8.4 Ολοκλήρωση με ανάλυση σε μερικά κλάσματα

Για την ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων της μορφής

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

όπου $P(x)$ και $Q(x)$ είναι πολυώνυμα και ο βαθμός του $Q(x)$ είναι μεγαλύτερος αυτού του $P(x)$, χρησιμοποιούμε την ανάλυση σε μερικά κλάσματα. Για παράδειγμα, έχουμε τις πιο κάτω περιπτώσεις:

$$\begin{aligned}
\frac{P_1x + P_2}{(a_1x + b_1)(a_2x + b_2)} &= \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} \\
\frac{P_{n-1}x^{n-1} + \ldots + P_1x + P_0}{(ax + b)^n} &= \frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(ax + b)^n} \\
\frac{P_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + P_1x + P_0}{(ax^2 + bx + c)^n} &= \frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \ldots \\
&+ \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}
\end{aligned}$$

όπου $A_1,\ A_2, \ldots, A_n,\ B_1,\ B_2, \ldots,\ B_n$ είναι σταθερές προς υπολογισμό. Με τα πιο κάτω παραδείγματα θα δείξουμε πως υπολογίζονται αυτές οι σταθερές.

Παράδειγμα: Να αναλυθούν τα πιο κάτω κλάσματα σε άθροισμα μερικών κλασμάτων:

$$\text{(i)}\ \frac{1}{x^2 + 8x + 7}, \quad \text{(ii)}\ \frac{1}{x(x^2 + 1)}, \quad \text{(iii)}\ \frac{12x - 22}{(x - 2)^2}$$

Στη περίπτωση που ο βαθμός του $P(x)$ είναι μαγαλύτερος αυτού του $Q(x)$ εκτελούμε τη διαίρεση και βρίσκουμε το πηλίκο $\pi(x)$ και το υπόλοιπο $u(x)$. Δηλαδή,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \pi(x) + \frac{u(x)}{Q(x)}.$$

Στη συνέχεια αναλύουμε σε μερικά κλάσματα τη ρητή συνάρτηση $\dfrac{u(x)}{Q(x)}$.

Ολοκληρώματα με ρητές συναρτήσεις

Παράδειγμα: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

(i) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+8x+7}$

(ii) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}$

(iii) $\displaystyle\int \frac{x^2-4}{x-1}\mathrm{d}x$

(iv) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x$

Ολοκληρώματα με τριγωνομετρικές ρητές συναρτήσεις

Ολοκληρώματα όπως τα

$$\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\cos x}{2\sin x - 3\cos x}\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + 4\sin x}\mathrm{d}x$$

μπορούν να μετατραπούν σε ολοκληρώματα με αλγεβρικές ρητές συναρτήσεις εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό $t = \tan\frac{x}{2}$ και χρησιμοποιώντας τους τριγωνομετρικούς τύπους

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

Παράδειγμα: Να αποδειχτεί ότι $\sin x = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

Παράδειγμα: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(i) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2-\cos x}\mathrm{d}x$

(ii) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + \tan x}$

Παράδειγμα: Να χρησιμοποιηθεί η αντικατάσταση $t = \tan\frac{x}{2}$ για να δειχτεί ότι

(i) $\displaystyle\int \sec x \mathrm{d}x = \log\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| + c$

(ii) $\displaystyle\int \sec x \mathrm{d}x = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + c$