7 ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

7.1 Εισαγωγή

Το **υπερβολικό ημίτονο** και **υπερβολικό συνημίτονο** συμβολίζονται με **sinh** και **cosh** αντίστοιχα, και ορίζονται ως

$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \textit{και} \quad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

Με ανάλογο τρόπο ορίζουμε:

Υπερβολική εφαπτομένη: $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}$

Υπερβολική συνεφαπτομένη: $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}$

Υπερβολική τέμνουσα: $\mathrm{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}$

Υπερβολική συντέμνουσα: $\mathrm{csch} x = \dfrac{1}{\sinh x} = \dfrac{2}{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}$

Γραφικές παραστάσεις:

Με τη χρήση των πιο πάνω γραφικών παραστάσεων, είναι εύκολο να γίνουν και οι γραφικές παραστάσεις των $\coth x$, $\mathrm{sech} x$ και $\mathrm{csch} x$.

7.2 Υπερβολικές ταυτότητες

Οπως έχουμε τις τριγωνομετρικές ταυτότητες έτσι έχουμε και τις αντίστοιχες υπερβολικές ταυτότητες. Η πιο σημαντική είναι η

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Απόδειξη:

Αλλες ταυτότητες είναι:

$$\begin{aligned}\sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \sinh y \cosh x \\ \cosh(x \pm y) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y\end{aligned}$$

Με βάση αυτές τις ταυτότητες μπορούμε να αποδείξουμε και τις υπόλοιπες ταυτότητες.

Παράδειγμα: Να αποδειχτεί ότι

$$\coth^2 x - 1 = \mathrm{csch}^2 x.$$

Παράδειγμα: Να αποδειχτεί ότι

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$$

7.3 Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

Η συνάρτηση $\sinh x$ είναι αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$, άρα είναι ένα προς ένα. Επομένως έχει αντίστροφη την οποία συμβολίζουμε με $\sinh^{-1} x$. ηρα έχουμε

$$y = \sinh^{-1} x \Leftrightarrow x = \sinh y,$$

όπου $x \in \mathbb{R}$ και $y \in \mathbb{R}$. Επίσης ισχύει ότι

$$\sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2+1}).$$

Απόδειξη:

Η συνάρτηση $\cosh x$ έχει αντίστροφη, την οποία συμβολίζουμε με $\cosh^{-1} x$, όταν $x \geq 0$ (ή $x \leq 0$). Αρα

$$y = \cosh^{-1} x \Leftrightarrow x = \cosh y,$$

όπου $x \geq 1$ και $y \geq 0$. Επίσης έχουμε την ταυτότητα

$$\cosh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2-1}).$$

Ανάλογα, ορίζουμε και τις υπόλοιπες αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις:

$$y = \tanh^{-1} x \Leftrightarrow x = \tanh y,$$

όπου $x \in (-1, 1)$ και $y \in \mathbb{R}$. Ισχύει η ταυτότητα

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}.$$

$$y = \coth^{-1} x \Leftrightarrow x = \coth y,$$

όπου $|x| > 1$ και $y \neq 0$. Ισχύει η ταυτότητα

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1}.$$

$$y = \mathrm{sech}^{-1} x \Leftrightarrow x = \mathrm{sech} y,$$

όπου $x \in (0, 1]$ και $y \in [0, +\infty)$. Ισχύει η ταυτότητα

$$\mathrm{sech}^{-1} x = \log \left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} \right)$$

$$y = \mathrm{csch}^{-1} x \Leftrightarrow x = \mathrm{csch} y,$$

όπου $x \neq 0$ και $y \neq 0$. Ισχύει η ταυτότητα

$$\mathrm{csch}^{-1} x = \log \left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|} \right).$$

Παράδειγμα: Να αποδειχτεί η ταυτότητα

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}, \quad -1 < x < 1.$$

7.4 Παράγωγοι των τριγωνομετρικών, αντίστροφων τριγωνομετρικών, υπερβολικών και αντίστροφων υπερβολικών συναρτήσεων

7.5 Ολοκληρώματα των τριγωνομετρικών, αντίστροφων τριγωνομετρικών, υπερβολικών και αντίστροφων υπερβολικών συναρτήσεων