6 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

6.1 Εισαγωγή

Η ολοκλήρωση μπορεί να θεωρηθεί ως η αντίστροφη πράξη της παραγώγισης. Αυτός δεν είναι ο μόνος τρόπος εισαγωγής της έννοιας του ολοκληρώματος, αφού το ολοκλήρωμα μπορεί να οριστεί ως το εμβαδό που περικλείεται από μια καμπύλη και τον άξονα των x. Οι δύο αυτές απόψεις του ορισμού του ολοκληρώματος μας οδηγούν αντίστοιχα στους πιο κάτω τύπους ολοκληρωμάτων:

1. του αόριστου ολοκληρώματος και
2. του ορισμένου ολοκληρώματος ή ολοκλήρωμα κατά Riemann.

Οι δύο τύποι ολοκληρωμάτων εξετάζονται εκτενέστερα στη συνέχεια.

6.2 Παράγουσα ή αόριστο ολοκλήρωμα

Επειδή η παράγωγος της x^2 είναι $2x$, έχουμε

$$x = \frac{1}{2}(x^2)' = \left(\frac{1}{2}x^2\right)'.$$

Η συνάρτηση $\frac{1}{2}x^2 + c$, όπου c είναι σταθερά, έχει παράγωγο τη συνάρτηση x και καλείται **παράγουσα** ή **αόριστο ολοκλήρωμα** της x. Γενικά, έχουμε τον πιο κάτω ορισμό:

Ορισμός: Μια συνάρτηση $F(x)$ καλείται **παράγουσα** (ή **αντιπαράγωγος**) ή **αόριστο ολοκλήρωμα** της $f(x)$ σε κάποιο διάστημα Δ, αν υπάρχει η παράγωγος $\dfrac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$ και ισχύει

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x).$$

Αν F είναι παράγουσα της f και c είναι μια σταθερή συνάρτηση στο Δ, τότε και η συνάρτηση $F + c$ είναι μια παράγουσα της f, επειδή $(F + c)' = F' + 0 = f$. Μπορούμε λοιπόν να διατυπώσουμε το πιο κάτω θεώρημα:

Θεώρημα: Αν η $F(x)$ είναι παράγουσα της $f(x)$ σε κάποιο διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση $F(x) + c$, όπου c είναι σταθερά, είναι επίσης παράγουσα της $f(x)$ για κάθε τιμή της σταθεράς c.

Συμβολισμός: Το αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x)$ συμβολίζεται με

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

Σημειώσεις: 1. Η $f(x)$ καλείται συνάρτηση προς ολοκλήρωση.
2. Η διαδικασία υπολογισμού του αόριστου ολοκληρώματος καλείται ολοκλήρωση της $f(x)$.
3. Το σύμβολο $\int$ καλείται σύμβολο ολοκλήρωσης.
4. Η σταθερά c καλείται σταθερά ολοκλήρωσης.

Βασικά αόριστα ολοκληρώματα

Από τον ορισμό του αόριστου ολοκλρώματος έχουμε

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + c \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Αρα το αόριστο ολοκλήρωμα παριστά μια οικογένεια συναρτήσεων της μορφής

$$y = F(x) + c.$$

Χρησιμοποιώντας τις παραγώγους βασικών συναρτήσεων βρίσκουμε τα ακόλουθα βασικά αόριστα ολοκληρώματα:

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}x = x + c\\
&\int x^k\mathrm{d}x = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c, \quad k \neq -1\\
&\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \log|x| + c\\
&\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c\\
&\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + c\\
&\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + c\\
&\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + c\\
&\int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + c\\
&\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + c\\
&\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + c
\end{aligned}$$

Ιδιότητες του αορίστου ολοκληρώματος

(i) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] = f(x)$

(ii) $\int af(x)\mathrm{d}x = a\int f(x)\mathrm{d}x$, a σταθερά

(iii) $\int[f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x.$

Γενικά,

$$\int[f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x)]\mathrm{d}x = \int f_1(x)\mathrm{d}x + \int f_2(x)\mathrm{d}x + \ldots \int f_k(x)\mathrm{d}x.$$

Παράδειγμα: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

Παράδειγμα: Να βρεθεί η συνάρτηση $f(x)$ τέτοια ώστε $f'(x) + \sin x = 0$ και $f(0) = 2$.

Παράδειγμα: Κάθε σημείο (x, y) μιας καμπύλης έχει κλίση ίση με $2x + 1$. Η καμπύλη διέρχεται από το σημείο $(-3, 0)$. Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η συνάρτηση $f(x)$ τέτοια ώστε $f''(x) = x + \cos x$, $f(0) = 1$ και $f'(0) = 1$.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η συνάρτηση $f(x)$ αν $\int f(x)\mathrm{d}x = 5x^3 - 3x + c$.

6.3 Ορισμένο ολοκλήρωμα (Ολοκλήρωμα Riemann)

Πρόβλημα: Να βρεθεί το εμβαδό $E(R)$ του επίπεδου χωρίου R που περικλείεται από το διάγραμμα της $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0)$, τις ευθείες $x = a,\ x = b$ και τον άξονα των x.

Χωρίζουμε το διάστημα $[a, b]$ σε n υποδιαστήματα, επιλέγοντας τα τυχαία σημεία $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{n-1}$ πάνω στον άξονα των x τέτοια ώστε

$$a(= x_0) < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < \ldots < x_{n-1} < (x_n =)b$$

Υποθέτουμε ότι $x_k^* \in (x_{k-1}, x_k)$ και ότι $\delta_k = x_k - x_{k-1}$.

Το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι κατά προσέγγιση ίσο με

$$f(x_k^*)\delta_k$$

Επομένως το εμβαδό που περικλείεται από την $y = f(x)$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = a,\ x = b$ είναι κατά προσέγγιση ίσο με

$$S_R^n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\delta_k$$

Το S_R^n καλείται **άθροισμα Riemann**.

Αν το όριο του αθροίσματος όταν $n \to +\infty$ υπάρχει ανεξάρτητα με τον τρόπο που θα επιλέξουμε τα x_k και x_k^* και όλα τα $\delta_k \to 0$, τότε αυτό το όριο καλείται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της $f(x)$ από το a ως το b και γράφεται

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\delta_k = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Οι σταθερές a και b καλούνται **άκρα της ολοκλήρωσης**. Επομένως το ζητούμενο εμβαδό είναι ίσο με

$$E = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Παράδειγμα: Να δειχτεί σε διάγραμμα το εμβαδό που αντιπροσωπεύεται από το καθένα από τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

Σημείωση: Αν η συνάρτηση $f \leq 0$ $\forall x \in [a, b]$, δηλαδή το διάγραμμα της f είναι κάτω από τον άξονα των x, τότε

$$E = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Παράδειγμα:

Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος

(i) $\int_a^b -f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

(ii) $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$

(iii) $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Φραγμένη συνάρτηση: Η συνάρτηση f καλείται **φραγμένη** στο $[a, b]$ αν υπάρχει αριθμός $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$-M \leq f(x) \leq M, \qquad \forall x \in [a, b]$$

Γεωμετρικά σημαίνει ότι το διάγγραμμα της f στο $[a, b]$ βρίσκεται μεταξύ των ευθειών $y = -M$ και $y = M$.

Θεώρημα: Εστω ότι η συνάρτηση f ορίζεται $\forall x \in [a,b]$.

(i) Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

(ii) Αν η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$ και έχει πεπερασμένα σημεία ασυνέχειας στο $[a,b]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

(iii) Αν η f δεν είναι φραγμένη στο $[a,b]$, τότε η f δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

Παράδειγμα:

6.4 Το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού

Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και αν $F(x)$ είναι μια παράγουσα της $f(x)$ στο $[a, b]$, τότε

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Θα γράφουμε

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)|_a^b \quad \text{ή} \quad = F(x)]_a^b \quad \text{ή} \quad = [F(x)]_a^b$$

Παράδειγμα: Να υπολογιστούν τα ορισμένα ολοκληρώματα:

Αλλες ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος

(i) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$ και $c \in [a,b]$, τότε

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(ii) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a,b]$, τότε

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$$

(iii) Αν η f και g είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο διάστημα $[a,b]$ και $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, τότε

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Παράδειγμα: Δίνεται ότι $\dfrac{1}{\sqrt{x^3+1}} < \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ για $4 \leq x \leq 9$. Να δειχτεί ότι $\displaystyle\int_4^9 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}} < \frac{1}{3}$.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-6x+9}$

Παράδειγμα: Αν m και n θετικοί ακέραιοι αριθμοί, να αποδειχτεί ότι

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n \mathrm{d}x = \int_0^1 x^n(1-x)^m \mathrm{d}x.$$

Στη συνέχεια να υπολογιστεί το $\int x(1-x)^{10}\mathrm{d}x$.

6.5 Το θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα

Αν η f είναι συνεχής συνάρτησης στο διάστημα $[a, b]$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $x^* \in [a, b]$, τέτοιος ώστε

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(x^*)(b-a).$$

Παράδειγμα:

Μέση τιμή: Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$, τότε η **μέση τιμή** της f στο $[a, b]$ ορίζεται ως

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η μέση τιμή της (i) $f(x) = \sin x$ στο $[0, \pi]$ (ii) $f(x) = x^3 + 2x + 5$ στο $[1, 2]$.

Το θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα μπορεί να διατυπωθεί και ως

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\bar{f}.$$

Ορισμένο ολοκλήρωμα με μεταβλητό άνω άκρο

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το $\int_0^x \sin t \mathrm{d}t$.

6.6 Το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού

Εστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και έστω ότι a είναι ένα οποιοδήποτε σημείο στο Δ. Αν η F ορίζεται ως

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

τότε

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \Delta.$$

Δηλαδή, το θεώρημα μπορεί να γραφεί και ως

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right] = f(x).$$

Αρα απο το θεώρημα αυτό συμπεραίνουμε ότι κάθε συνεχής συνάρτησης στο διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

Παράδειγμα: Να υπολογιστούν οι παράγωγοι των (i) $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+\sqrt{t}}$ (ii) $\int_0^x \frac{t}{\cos t}\mathrm{d}t$.

Παράδειγμα: Εστω $F(x) = \int_2^x \sqrt{3t^2+1}\mathrm{d}t$. Να βρεθούν: (i) $F(2)$ (ii) $F'(2)$ (iii) $F''(2)$.