5 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

5.1 Μονοτονία συνάρτησης

Θεώρημα: Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, b), τότε η f είναι

(i) **αύξουσα** στο (a, b), αν και μόνο αν $\forall x \in (a, b)$, έχουμε $f'(x) \geq 0$

(ii) **φθίνουσα** στο (a, b), αν και μόνο αν $\forall x \in (a, b)$, έχουμε $f'(x) \leq 0$

Κοίλα γραφικής παράστασης

Ορισμός: Εστω ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα. Η f καλείται

(i) **κυρτή** (ή θα λέμε η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω) αν η f' είναι αύξουσα στο διάστημα.

(ii) **κοίλη** (ή θα λέμε η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω) αν η f' είναι φθίνουσα στο διάστημα.

Θεώρημα: (i) Αν $f''(x) > 0$ στο διάστημα (a, b), τότε η f είναι κυρτή στο (a, b).
(ii) Αν $f''(x) < 0$ στο διάστημα (a, b), τότε η f είναι κοίλη στο (a, b).

Σημείο καμπής

Στο σχήμα η γραφική παράσταση της f είναι κυρτή στο διάστημα $(a, x_0]$ και κοίλη στο διάστημα $[x_0, b)$. Το σημείο $(x_0, f(x_0))$ καλείται **σημείο καμπής** και θα λέμε ότι η f **παρουσιάζει καμπή** στο x_0.

Θεώρημα: Αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει πρώτη και δεύτερη παράγωγο στο διάστημα (a, b) και $x_0 \in (a, b)$, τότε το σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της f αν $f''(x_0) = 0$ και η $f''(x)$ αλλάζει πρόσημο στο x_0.

Παράδειγμα: Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$.

5.2 Ακρότατα συνάρτησης

Η συνάρτηση f έχει **τοπικό μέγιστο** στο σημείο x_0 αν $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in$ σε κάποιο ανοικτό διάστημα που περιλαμβάνει το x_0.
Η f έχει **απόλυτο μέγιστο** στο σημείο x_0 αν $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in$ στο πεδίο ορισμού της f.

Η συνάρτηση f έχει **τοπικό ελάχιστο** στο σημείο x_0 αν $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in$ σε κάποιο ανοικτό διάστημα που περιλαμβάνει το x_0.
Η f έχει **απόλυτο ελάχιστο** στο σημείο x_0 αν $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in$ στο πεδίο ορισμού της f.

Τα τοπικά μέγιστα και τα τοπικά ελάχιστα της f καλούνται **τοπικά ακρότατα** της f. Το απόλυτο ελάχιστο και απόλυτο μέγιστο της f καλούνται **απόλυτα ακρότατα** της f.

Θεώρημα: Αν η συνάρτηση f έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο x_0 τότε $f'(x_0) = 0$ ή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Τα σημεία στα οποία $f'(x) = 0$ ή η f δεν είναι παραγωγίσιμη καλούνται **κρίσιμα σημεία** της f. Τα σημεία στα οποία $f'(x) = 0$ καλούνται **στάσιμα σημεία** της f. Είναι φανερό ότι ένα στάσιμο σημείο είναι και κρίσιμο. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Για όλες τις συναρτήσεις οι οποίες παρουσιάζονται γραφικά στα σχήματα (α) - (η), το σημείο x_0 είναι κρίσιμο σημείο. Στα σχήματα (α) - (δ) το x_0 είναι στάσιμο σημείο επειδή υπάρχει οριζόντια εφαπτομένη στο x_0, δηλαδή $f'(x_0) = 0$.

Παράδειγμα: Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία των συναρτήσεων: (i) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x+4)$ (ii) $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}}$

Κριτήριο της πρώτης παραγώγου

Θεωρούμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα (a, b) μ' ένα κρίσιμο σημείο $x_0 \in (a, b)$.

(i) Αν $\forall x \in (a, x_0)$ ισχύει $f'(x) > 0$ και $\forall x \in (x_0, b)$ ισχύει $f'(x) < 0$, τότε η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο x_0.

(ii) Αν $\forall x \in (a, x_0)$ ισχύει $f'(x) < 0$ και $\forall x \in (x_0, b)$ ισχύει $f'(x) > 0$, τότε η συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο x_0.

(iii) Αν $\forall x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$ ισχύει $f'(x) > 0$ ή $f'(x) < 0$, τότε η συνάρτηση f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο x_0.

Κριτήριο της δεύτερης παραγώγου

Θεωρούμε ότι η συνάρτηση f έχει δεύτερη παράγωγο στο στάσιμο σημείο x_0.

(i) Αν $f''(x_0) > 0$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

(ii) Αν $f''(x_0) < 0$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.

Παρατήρηση: Το πιο πάνω κριτήριο βασίζεται στο ότι μια συνάρτηση έχει τοπικό μέγιστο όταν η γραφική της παράσταση έχει οριζόντια εφαπτομένη και είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω) και έχει τοπικό ελάχιστο όταν η γραφική της παράσταση έχει οριζόντια εφαπτομένη και είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω).

Παράδειγμα: Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων (i) $f(x) = x^2 + \frac{250}{x}$ (ii) $f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}}$

Θεώρημα: Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$, τότε η f έχει απόλυτο ελάχιστο και απόλυτο μέγιστο και βρίσκονται στα άκρα του διαστήματος $[a,b]$ ή σε τοπικά ακρότατα.

Θεώρημα: Αν η συνάρτηση f έχει απόλυτο ακρότατο στο διάστημα (a,b), τότε βρίσκεται σε ένα κρίσιμο σημείο.

Σημείωση: Αν $\lim f = +\infty$, τότε η f δεν έχει απόλυτο μέγιστο. Αν $\lim f = -\infty$, τότε η f δεν έχει απόλυτο ελάχιστο.

Παράδειγμα: Να βρεθούν τα απόλυτα ακρότατα των πιο κάτω συναρτήσεων στα διαστήματα που δίνονται:
(i) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ στο $[-2,4]$
(ii) $f(x) = 4x^3 - 3x^4$ στο $(-\infty,+\infty)$
(iii) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ στο $(-5,-1)$.

Παράδειγμα: Να αποδειχτεί ότι $\sin x \leq x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

5.3 Γραφική παράσταση συνάρτησης

Ασύμπτωτες: Η ευθεία $x = a$ καλείται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** του διαγράμματος της f αν ισχύει

$$\lim_{x \to a} f = \infty \quad ή \quad \lim_{x \to a^+} f = \infty \quad ή \quad \lim_{x \to a^-} f = \infty$$

Η ευθεία $x = b$ καλείται **οριζόντια ασύμπτωτη** του διαγράμματος της f αν ισχύει

$$\lim_{x \to +\infty} f = b \quad ή \quad \lim_{x \to -\infty} f = b$$

Η ευθεία $y = ax + b$ καλείται **πλάγια ασύμπτωτη** του διαγράματος της f αν ισχύει

$$\lim_{x \to +\infty} [f - (ax + b)] = 0 \quad ή \quad \lim_{x \to -\infty} [f - (ax + b)] = 0$$

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι ασύμπτωτες
(i) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 2x - 3}$ (ii) $f(x) = \dfrac{x^3 - 4}{x^2}$

Για να σχηματίσουμε το διάγραμμα μιας συνάρτησης f με $y = f(x)$, ακολουθούμε συνήθως τα πιο κάτω βήματα:

(α) Βρίσκουμε τα σημεία τομής του διαγράματος της f με τους άξονες.
(β) Εξετάζουμε το πρόσημο της f.
(γ) Εξετάζουμε τη μονοτονία και βρίσκουμε (αν υπάρχουν) τα τοπικά ακρότατα και σημεία καμπής της f.
(δ) Βρίσκουμε (αν υπάρχουν) τις γραμμικές ασύμπτωτες.
(ε) Εξετάζουμε τη συμπεριφορά της f όταν $x \to \pm\infty$.

Παράδειγμα: Να γίνει η γραφική παράσταση των συναρτήσεων:
(i) $y = \dfrac{3(x-2)}{x(x+6)}$ (ii) $y = \dfrac{(x+1)^2(x-3)}{(x-1)(x-2)}$

Κατακόρυφη εφαπτομένη και σημείο ανάκαμψης

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0 και

$$\lim_{x\to x_0} |f'(x)| = +\infty$$

τότε η γραφική παράσταση της f έχει **κατακόρυφη εφαπτομένη** στο σημείο x_0.

Στα σχήματα (γ) και (δ) το σημείο x_0 καλείται **σημείο ανάκαμψης**.

Παράδειγμα: Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 2x + 3x^{\frac{2}{3}}$.

5.4 Η μέθοδος του Newton

Απο τη γραφική παράσταση η λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι $x = a$. Αν αυτή η λύση δεν είναι δυνατό να βρεθεί αναλυτικά, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε προσεγγιστική επίλυση (αριθμητική μέθοδος).
Αν $x = x_1$ είναι η αρχική προσέγγιση τότε από το σχήμα

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1) - 0}{x_1 - x_2}$$

Αρα

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Ανάλογα βρίσκουμε

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \\ x_4 &= x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Η διαδικασία αυτή για την προσεγγιστική επίλυση της εξίσωσης $f(x) = 0$ καλείται **επαναληπτική μέθοδος του Newton**. Η διαδικασία αυτή τελειώνει όταν $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-n}$, όπου n είναι δοσμένος θετικός ακέραιος αριθμός.

Παράδειγμα: Να βρεθεί κατά προσέγγιση η πραγματική ρίζα της εξίσωσης $x^3 - x - 1 = 0$.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η $\sqrt{2}$.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης $\cos x - x = 0$.

5.5 Θεώρημα Rolle - Θεώρημα μέσης τιμής

Θεώρημα Rolle: Εστω η συνάρτηση f για την οποία υποθέτουμε ότι
(i) είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$
(ii) είναι παραγωγίσιμη στο (a,b)
(iii) $f(a)=f(b)$
Τότε υπάρχει σημείο $c\in(a,b)$ τέτοιο ώστε

$$f'(c)=0.$$

Παράδειγμα: Να εφαρμοστεί το θεώρημα Rolle στη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$.

Παράδειγμα: Να εφαρμοστεί το θεώρημα Rolle στη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leq 0 \\ x^3, & x>0 \end{cases}$$

Παράδειγμα: Να εξεταστεί αν έχει εγαρμογή το θεώρημα Rolle στη συνάρτηση $f(x)=|x|$.

Το επόμενο θεμελιώδες θεώρημα, που αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος Rolle, είναι γνωστό ως

Θεώρημα μέσης τιμής: Αν η συνάρτηση f είναι
(i) συνεχής στο διάστημα $[a, b]$
(ii) παραγωγίσιμη στο (a, b)
Τότε υπάρχει $c \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Αμεση συνέπεια του θεωρήματος μέσης τιμής είναι τα πιο κάτω συμπεράσματα:
1(α) Αν $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a, b)$, τότε η f είναι αύξουσα στο $[a, b]$.
(β) Αν $f'(x) < 0 \ \forall x \in (a, b)$, τότε η f είναι φθίνουσα στο $[a, b]$.
(γ) Αν $f'(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$, τότε η f είναι σταθερή στο $[a, b]$.

2 Αν οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι συνεχείς στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο (a, b) με $f'(x) = g'(x) \ \forall x \in (a, b)$ τότε $f(x) - g(x) = k \ \forall x \in [a, b]$, όπου k είναι σταθερά.

Παράδειγμα: Εστω $f(x) = x^3 - x + 1$. Να βρεθεί $c \in (0, 3)$ τέτοιο ώστε

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(0)}{3}$$

Παράδειγμα: Να αποδειχτεί ότι $|\sin x - \sin y| \leq |x - y| \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα: Αν $g(x) = x^3 - 4x + 6$, να βρεθεί $f(x)$ τέτοια ώστε $f'(x) = g'(x)$ και $f(1) = 2$.