4. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

4.1 Εισαγωγή

Από προηγούμενο κεφάλαιο γνωρίζουμε ότι η κλίση της AB δίνεται από τη σχέση

$$\lambda_{AB} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Ας υποθέσουμε ότι το x_1 τείνει στο x_0, τότε και το B θα τείνει στο A κατά μήκος της γραφικής παράστασης της f και η ευθεία AB τείνει στην εφαπτομένη της f στο σημείο A. Αρα η κλίση της AB τείνει στη κλίση της εφαπτομένης στο A. Επομένως

$$\lambda_{\varepsilon\varphi} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Γράφουμε $x_1 = x_0 + h$. Αν $A(x_0, y_0)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f, τότε η κλίση της f στο A δίνεται από τη σχέση

$$\lambda_{\varepsilon\varphi} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

υποθέτοντας ότι το όριο υπάρχει. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο A είναι

$$y - y_0 = \lambda_{\varepsilon\varphi}(x - x_0).$$

Αν $A(x, y)$ είναι ένα οποιοδήποτε σημείο της f, τότε ο πιο πάνω ορισμός γράφεται

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Παράδειγμα: Αν $f(x) = x^3$, να βρεθεί η $f'(2)$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $y = x^2 + 2x + 4$ στο σημείο $x = 1$.

Μέσος και στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής

Αν $y = f(x)$, τότε ο **μέσος ρυθμός μεταβολής** του y ως προς το x στο διάστημα $[x_0, x_1]$ είναι ίσος με

$$\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Ο **στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής** του y ως προς x στο σημείο (x_0, y_0) είναι

$$f'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί ο μέσος ρυθμός μεταβολής της $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ στο διάστημα $[-1, 2]$ και ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του y ως προς x στο σημείο $x = -1$.

4.2 Παράγωγος συνάρτησης

Η συνάρτηση f' την οποία έχουμε ορίσει προηγουμένως καλείται **παράγωγος της f**. Η έννοια της παραγώγου είναι η πιο βασική έννοια του **διαφορικού λογισμού**. Αρα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός: Η συνάρτηση f' η οποία ορίζεται από τον τύπο

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

καλείται **παράγωγος της συνάρτησης f ως προς x**. Το πεδίο ορισμού της f' είναι οι τιμές του x εκείνες για τις οποίες το όριο υπάρχει.

Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου

Η τιμή της f' στο σημείο x είναι ίση με την κλίση της εφαπτομένης της f στο x.

Ερμηνεία παραγώγου ως ρυθμός μεταβολής

Αν $y = f(x)$, τότε η f' είναι η συνάρτηση εκείνη της οποίας η τιμή στο x είναι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του y ως προς x στο σημείο x.

Συμβολισμός: Η παράγωγος της συνάρτησης f ως προς x θα συμβολίζεται με f' ή $f'(x)$ ή $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)]$ ή $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ ή $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.
Η παράγωγος της f σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο x_0 θα συμβολίζεται με $f'(x_0)$ ή $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)]|_{x=x_0}$ ή $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{x=x_0}$.

Παράδειγμα: Με τη χρήση του ορισμού της παραγώγου, να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\text{(i) } f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{(ii) } f(x) = \sqrt{9-4x} \quad \text{(iii) } f(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

Υπαρξη της παραγώγου

Αν η παράγωγος της f στο σημείο x_0 υπάρχει, τότε θα λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη στο** x_0. Αν η f είναι παραγωγισιμη $\forall x \in (a, b)$, τοτε θα λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη στο** (a, b). Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, +\infty)$, τοτε θα λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη συνάρτηση**.
Στα σημεία όπου η f δεν είναι παραγωγίσιμη, θα λέμε ότι η παράγωγος δεν υπάρχει. Παραδείγματα στα οποία η παράγωγος δεν υπάρχει:

Παράδειγμα:

Παράγωγος και συνέχεια: Θεώρημα: Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0, τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.
Το αντίστροφο αυτού του θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = |x - 3|$ είναι συνεχής στο σημείο $x = 3$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 3$.

Παράγωγος στα άκρα ενός διαστήματος

Εχουμε δει ότι η παράγωγος της f δίνεται από τον τύπο

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Με ανάλογο τρόπο ορίζονται και οι **πλευρικές παράγωγοι**. Οι παράγωγοι από **δεξιά και αριστερά** δίνονται από τους τύπους

$$f'_{+}(x) = \lim_{h \to 0^{+}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad f'_{-}(x) = \lim_{h \to 0^{-}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

αντίστοιχα.

Σημείωση: Από τη θεωρία των ορίων παρατηρούμε ότι η $f'(x_0)$ υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι $f'_{+}(x_0)$, $f'_{-}(x_0)$ και ισχύει $f'_{+}(x_0) = f'_{-}(x_0)$. Αρα

$$f'(x_0) = f'_{+}(x_0) = f'_{-}(x_0).$$

Θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ αν

(i) η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b),

(ii) η f είναι παραγωγίσιμη από δεξιά στο a και

(iii) η f είναι παραγωγίσιμη από αριστερά στο b.

Παράδειγμα: Να δειχτεί ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq 1 \\ x + 2, & x > 1 \end{cases}$$

είναι συνεχής αλλά μη παραγωγίσιμη στο σημείο $x = 1$. Να γίνει η γραφική παράσταση της f.

Παράδειγμα: Εστω ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες:

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y) + 5xy$

(ii) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 3$

Να υπολογιστούν: (α) $f(0)$ και (β) $f'(x)$.

4.3 Κανόνες παραγώγισης

(i) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[c] = 0$, όπου c είναι σταθερά.

(ii) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[cf(x)] = c\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)]$

(iii) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f_1(x) + f_2(x) + \ldots] = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f_1(x)] + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f_2(x)] + \ldots$

(iv) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f_1(x)f_2(x)] = f_1\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f_2(x)] + f_2\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f_1(x)]$

Απόδειξη:

(v) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}\right] = \dfrac{f_2(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f_1(x)] - f_1(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f_2(x)]}{f_2(x)]^2}$

(vi) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^n] = nx^{n-1}$

Παράγωγος ανώτερης τάξης

Αν η παράγωγος της συνάρτησης f, δηλαδή η f', είναι παραγωγίσιμη, τότε η παράγωγος της f' καλείται **δεύτερη παράγωγος** της f και συμβολίζεται με f'' ή $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$ ή $f^{(2)}$. Ανάλογα ορίζεται η τρίτη, η τέταρτη παράγωγος της f, και επαγωγικά η νιοστή παράγωγος της f δίνεται από τον τύπο

$$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n} = f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f^{(n-1)}(x)], \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Τύπος του Leibnitz

Εχουμε δεί ότι

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f_1(x)f_2(x)] = f_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f_2(x)] + f_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f_1(x)].$$

Τώρα,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}[f_1(x)f_2(x)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f_1 f_2' + f_2 f_1'] = f_1 f_2'' + 2f_1' f_2' + f_1'' f_2$$

Επαγωγικά, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[f_1(x)f_2(x)] &= f_1 f_2^{(n)} + \binom{n}{1} f_1' f_2^{(n-1)} + \binom{n}{2} f_1'' f_2^{(n-2)} + \ldots \\ &+ \binom{n}{n-1} f_1^{(n-1)} f_2' + f_1^{(n)} f_2 \end{aligned}$$

ο οποίος είναι ο **τύπος του Leibnitz**.

4.4 Παράγωγος μη-αλγεβρικών συναρτήσεων

(i) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\sin x] = \cos x$

Απόδειξη:

(ii) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\cos x] = -\sin x$

(iii) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\tan x] = \sec^2 x$

(iv) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\cot x] = -\csc^2 x$

(v) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\sec x] = \sec x \tan x$

(vi) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\csc x] = -\csc x \cot x$

(vii) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{e}^x] = \mathrm{e}^x$

(viii) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\log x] = \dfrac{1}{x}$

4.5 Παράγωγος σύνθετης συνάρησης. Κανόνας αλυσίδας

Αν η συνάρτηση f_2 είναι παραγωγίσιμη στο x και η συνάρτηση f_1 είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $f_2(x)$, τότε η σύνθεση $f_1 \circ f_2$ είναι παραγωγίσιμη στο x. Αν θέσουμε $y = f_1(f_2(x))$ και $u = f_2(x)$, τότε $y = f_1(u)$ και

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

Ο πιο πάνω τύπος καλείται **κανόνας αλυσίδας**. Γράφουμε $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(u)]$ και $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = f'(u)$, οπότε ο κανόνας παίρνει τη μορφή

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(u)] = f'(u)u'(x).$$

Μια άλλη μορφή του κανόνα αλυσίδας είναι

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f_1(f_2(x))\right] = f_1'(f_2(x))f_2'(x).$$

Παράδειγμα:

4.6 Παράγωγος πλεγμένης συνάρτησης

Παράδειγμα: Να υπολογιστούν οι παράγωγοι:

(i) $xy + 3y - x + 2 = 0$

(ii) $y + \sin y = x$

Παράδειγμα (Λογαριθμική παραγώγιση): Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$y = \sqrt[5]{\frac{x-1}{x+1}}.$$

4.7 Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης

Θεώρημα: Εστω ότι η συνάρτηση f έχει αντίστροφη και ότι η τιμή της f^{-1} μεταβάλλεται σ' ένα διάστημα στο οποίον η f έχει παράγωγο που δεν μηδενίζεται. Τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό και η παράγωγος της δίνεται από τον τύπο

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Ο πιο πάνω τύπος μπορεί να γραφεί σε πιο απλή μορφή όταν θέσουμε $y = f^{-1}(x)$. Τότε $x = f(y)$ και επομένως

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (f^{-1})'(x)$$

και

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = f'(y) = f'(f^{-1}(x)).$$

Αρα ο τύπος γράφεται

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$$

Παράδειγμα: Αν $f(x) = x^5 + 2x^3 + x + 1$, να βρεθεί η παράγωγος της f^{-1}.
Εχουμε

$$f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 1 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

και επομένως η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Τώρα,

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y).$$

Αρα

$$x = y^5 + 2x^3 + x + 1$$

και επομένως

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 5y^4 + 6y^2 + 1$$

Αρα

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f^{-1}(x)\right] = \frac{1}{5y^4 + 6y^2 + 1}.$$

Διαφορετικά, η παράγωγος της f^{-1} μπορεί να βρεθεί και με πλεγμένη παραγώγιση. Εστω ότι έχουμε το πιο πάνω παράδειγμα.

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y).$$

Αρα

$$x = y^5 + 2x^3 + x + 1$$

Παραγωγίζουμε ως προς x

$$1 = 5y^4 y' + 6y^2 y' + y'$$

και επομένως

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{5y^4 + 6y^2 + 1}.$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η παράγωγος της $\sin^{-1}(x)$.

4.8 Παραμετρικές εξισώσεις

Εχουμε δει ότι για να περιγράψουμε μια καμπύλη εκφράζουμε την τεταγνένη y ενός σημείου $A(x, y)$ της καμπύλης συναρτήσει της τετμιμένης x (ή οι συντεταγμένες x και y εμφανίζονται σε πλεγμένη μορφή). Σε ορισμένες περιπτώσεις είναι πιο χρήσιμο να εκφράσουμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες x και y συναρτήσει μιας τρίτης μεταβλητής. Δηλαδή, έχουμε

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

Αυτές οι εξισώσεις καλούνται **παραμετρικές εξισώσεις**. Η μεταβλητή t καλείται **παράμετρος**. Σε πολλά προβλήματα η μεταβλητή t αντιπροσωπεύει τον χρόνο και $(x, y) = (f(t), g(t))$ προσδιορίζει την θέση ενός κινητού.

Παράγωγος σε παραμετρική μορφή

Εστω ότι x και y είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις του t και $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \neq 0$ σε κάποιο διάστημα Δ. Τότε οι παράγωγοι $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ και $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ στο διάστημα Δ, δίνονται από τους τύπους

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}, \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}.$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης που περιγράφεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x = \frac{1}{1+t^2}$, $y = t^3$ στο σημείο όπου $t = -1$.

Απαλοιφή της παραμέτρου από τις παραμετρικές εξισώσεις μας δίνει μια καρτεσιανή εξίσωση.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η καρτεσιανή εξίσωση που αντιστοιχεί στις παραμετρικές εξισώσεις

$$x = \sin\theta, \quad y = \cos 2\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$