3. ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

3.1 Οριο συνάρτησης

Πολλές φορές είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε τι συμβαίνει με τις τιμές μιας συνάρτησης $y = f(x)$, όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή x παίρνει αυξανόμενες χωρίς περιορισμό τιμές ή τείνει σε μια συγκεκριμένη σταθερά. Γι' αυτό το λόγο έχουμε την εισαγωγή της μαθηματικής έννοιας **όριο συνάρτησης**.

Συμβολισμός: Αν η συνάρτηση $f(x)$ τείνει στο όριο L καθώς το x τείνει στο a, $+\infty$, $-\infty$, θα γράφουμε

$$\lim_{x\to a} f(x) = L, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = L, \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = L,$$

αντίστοιχα.

Αν η συνάρτηση $f(x)$ τείνει στο όριο L_1 καθώς το x τείνει στο a από τα αριστερά, θα γράφουμε

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1$$

Αν η συνάρτηση $f(x)$ τείνει στο όριο L_2 καθώς το x τείνει στο a από τα δεξιά, θα γράφουμε

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_2$$

Το όριο $\lim_{x\to a^-} f(x)$ καλείται το **αριστερό όριο** της $f(x)$ στο a και το όριο $\lim_{x\to a^+} f(x)$ καλείται το **δεξιό όριο** της $f(x)$ στο a. Τα δύο αυτά όρια καλούνται **πλευρικά όρια** της συνάρτησης $f(x)$ στο a.

Υπαρξη ορίου συνάρτησης

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

(δηλαδή, το όριο $\lim_{x\to a} f(x)$ υπάρχει)
αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L = \lim_{x\to a^-} f(x)$$

Αν το όριο $\lim_{x\to a} f(x)$ υπάρχει, τότε είναι μοναδικό. Δηλαδή, αν

$$\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \quad \textit{και} \quad \lim_{x\to a} f(x) = L_2$$

τότε $L_1 = L_2$.

Παράδειγμα:

Σημείωση: Στις παριπτώσεις όπου $\lim f(x) = +\infty$ και $\lim f(x) = -\infty$ θα λέμε επίσης ότι το όριο δεν υπάρχει.

Μερικά βασικά όρια

(i) $\lim_{x\to a} k = \lim_{x\to +\infty} k = \lim_{x\to -\infty} k = k, \quad k$ σταθερά

(ii) $\lim_{x\to a} x = a, \quad \lim_{x\to +\infty} x = +\infty, \quad \lim_{x\to -\infty} x = -\infty$

(iii) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

(iv) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

Ιδιότητες των ορίων

Εστω ότι lim είναι οποιοδήποτε από τα όρια $\lim_{x\to a}$, $\lim_{x\to a^-}$, $\lim_{x\to a^+}$, $\lim_{x\to +\infty}$, $\lim_{x\to -\infty}$ και υποθέτουμε ότι $\lim f_1(x) = L_1$ και $\lim f_2(x) = L_2$. Τότε

(i) $\lim k f_1(x) = k \lim f_1(x) = kL_1, \ k$ σταθερά

(ii) $\lim[f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim f_1(x) \pm \lim f_2(x) = L_1 \pm L_2$

(iii) $\lim[f_1(x) f_2(x)] = \lim f_1(x) \lim f_2(x) = L_1 L_2$

(iv) $\lim \left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right] = \frac{\lim f_1(x)}{\lim f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \quad L_2 \neq 0$

(v) $\lim[f_1(x)]^n = [\lim f_1(x)]^n = L_1^n, \quad n \in \mathbb{N}$

(vi) $\lim \sqrt[n]{f_1(x)} = \sqrt[n]{\lim f_1(x)} = \sqrt[n]{L_1}, \quad \sqrt[n]{L_1} \in \mathbb{R}$

Παράδειγμα:

Ορια πολυωνύμων: Εστω

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

τότε

(i) $$\lim_{x \to a} P(x) = P(a), \quad a \in \mathbb{R}$$

(ii) $$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(iii) $$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & n = 2, 3, 6, \ldots \\ -\infty, & n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

(iv) $$\lim_{x \to +\infty} P(x) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n$$

(v) $$\lim_{x \to -\infty} P(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n$$

Ορια ρητών συναρτήσεων:
Εχουμε
$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Παράδειγμα:

Θεώρημα Sandwich
Αν ισχύει $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$ και $\lim f_1(x) = L = \lim f_2(x)$, τότε
$$\lim f(x) = L$$

Παράδειγμα:

3.2 Συνέχεια συνάρτησης

Μια συνάρτηση f τηα λέμε ότι είναι **συνεχής** στο σημείο c, τότε και μόνο τότε αν

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα (a, b), αν είναι συνεχής $\forall x \in (a, b)$.

Η $f(x)$ είναι **ασυνεχής** (δηλαδή, δεν είναι συνεχής) στο σημείο c αν

(i) $f(c)$ δεν ορίζεται

(ii) το όριο $\lim_{x \to c} f(x)$ δεν υπάρχει

(iii) $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$

Παράδειγμα:

Συνέχεια πολυωνύμου: Το πολυώνυμο είναι συνεχής συνάρτηση.

Συνέχεια ρητής συνάρτησης: Η ρητή συνάρτηση είναι συνεχής συνάρτηση εκτός στα σημεία όπου μηδενίζεται ο παρανομαστής.

Οριο και συνέχεια σύνθεσης συναρτήσεων

Αν $\lim f_2(x) = L$ και η συνάρτηση $f_1(x)$ είναι συνεχής στο L, τότε

$$\lim f_1(f_2(x)) = f_1(L).$$

Δηλαδή,

$$\lim f_1(f_2(x)) = f_1(\lim f_2(x)).$$

Αν η συνάρτηση f_2 είναι συνεχής στο σημείο c και η συνάρτηση f_1 είναι συνεχής στο σημείο $f_2(c)$, τότε η σύνθεση $f_1 \circ f_2$ είναι συνεχής στο c.

Πλευρική συνέχεια: Αν η συνάρτηση f ορίζεται στο σημείο c και

(i) $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = f(c)$, τότε λέμε ότι η f είναι συνεχής από τα δεξιά στο c.

(ii) $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = f(c)$, τότε λέμε ότι η f είναι συνεχής από τα αριστερά στο c.

Αμεση συνέπεια των πιο πάνω είναι ότι:

(i) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο c, αν και μόνο αν είναι συνεχής από τα αριστερά και από τα δεξιά στο σημείο c.

(ii) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ αν

(α) Η f είναι συνεχής στο ανοικτό διάστημα (a, b)

(β) Η f είναι συνεχής στο a από τα δεξιά

(γ) Η f είναι συνεχής στο b από τα αριστερά

Παράδειγμα: Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς k για την οποία η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} kx^2, & x \leq 2 \\ 2x + k, & x > 2 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο σημείο $x = 2$.

Παράδειγμα:Να εξεταστεί αν η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & x \geq 1 \end{cases}$$

είναι συνεχής.

Ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων:

Αν f_1 και f_2 είναι συνεχείς συναρτήσεις στο σημείο c, τότε

(i) το άθροισμα $f_1 + f_2$ είναι συνεχής συνάρτηση στο c

(ii) η διαφορά $f_1 - f_2$ είναι συνεχής συνάρτηση στο c

(iii) το γινόμενο $f_1 f_2$ είναι συνεχής συνάρτηση στο c

(iv) το πηλίκο $\frac{f_1}{f_2}$ είναι συνεχής συνάρτηση στο c αν $f_2(c) \neq 0$ και ασυνεχής στο c αν $f_2(c) = 0$.

3.3 Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και c είναι κάποιος αριθμός μεταξύ $f(a)$ και $f(b)$, τότε υπάρχει τουλάχιστο ένα $x \in (a, b)$ τέτοιον ώστε $f(x) = c$.

Ειδική περίπτωση του θεωρήματος

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και αν $f(a)$ και $f(b)$ έχουν αντίθετα πρόσημα (δηλαδή, $f(a)f(b) < 0$), τότε υπάρχει τουλάχιστο μια λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο (a, b).

Παράδειγμα: Αν a και b είναι θετικές σταθερές, τότε να αποδειχτεί ότι η εξίσωση

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3} = 0$$

έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $(1, 3)$.

3.4 Όρια και συνέχεια τριγωνομετρικών, εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων

Ισχύει

$$\lim_{x\to 0}\sin x = 0, \qquad \lim_{x\to 0}\cos x = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$$

Οι συναρτήσεις $\sin x$ και $\cos x$ είναι συνεχείς. Η συνάρτηση $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ είναι συνεχής εκτός στα σημεία όπου $\cos x = 0$.

Παράδειγμα:

Ισχύει

$$\lim_{x\to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \log x = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$$

Η συνάρτηση e^x είναι συνεχής και η συνάρτηση $\log x$ είναι συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Παράδειγμα:

Μερικά άλλα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty, \quad n > 0$

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{x^n} = 0, \quad n > 0$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \log x = 0$

Παράδειγμα:

3.5 Ορια συναρτήσεων σε πιο αυστηρή μαθηματική γλώσσα

Οταν η συνάρτηση $f(x)$ πλησιάζει όσο θέλουμε μια σταθερά $L \in \mathbb{R}$, καθώς το x τείνει σε μια σταθερά a, τότε λέμε ότι το όριο της f είναι το L, όταν το x τείνει στο a και γράφουμε

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Σε πιο αυστηρή μαθηματική γλώσσα δαιτυπώνεται ο εξής ορισμός του πιο πάνω ορίου: Λέμε ότι το όριο μιας συνάρτησης f, όταν το x τείνει στο $a \in \mathbb{R}$, είναι ο αριθμός $L \in \mathbb{R}$, τότε και μόνο τότε αν για κάθε $\epsilon > 0$ μπορεί να βρεθεί $\delta > 0$ τέτοιος ώστε όταν $|f(x) - L| < \epsilon$, το x ικανοποιεί τη συνθήκη $0 < |x - a| < \delta$. Συμβολικά

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \quad & \forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0 : \\ & 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon \end{aligned}$$

Συνολικά υπάρχουν 15 όρια που μπορούν να ορισθούν ανάλογα:

$$f(x) \to \left\{ \begin{array}{c} +\infty \\ -\infty \\ L \end{array} \right\} \quad όταν \quad x \to \left\{ \begin{array}{c} +\infty \\ -\infty \\ a \\ a^+ \\ a^- \end{array} \right\}$$

Για παράδειγμα,

(i)

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \quad & \forall \epsilon > 0, \ \exists M > 0 : \\ & \forall x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \quad & \forall k > 0, \ \exists M < 0 : \\ & \forall x < M \Rightarrow f(x) > k \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \quad & \forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0 : \\ & a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon \end{aligned}$$

Παράδειγμα: $\lim_{x\to -1}(7x+5) = -2, \quad \epsilon = 0.01$
Να βρεθεί $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|x-a| < \delta \Rightarrow |f-L| < \epsilon$.

$$|f-L| < \epsilon \Rightarrow |7x+5-(-2)| < \epsilon \Rightarrow 7|x+1| < \epsilon \Rightarrow |x-(-1)| < \frac{\epsilon}{7}$$

Αρα $\delta = \frac{\epsilon}{7} = \frac{1}{700}$.

Παράδειγμα: Να αποδειχτεί ότι $\lim_{x\to 3}(x^2-5) = 4$.

$$|(x^2-5)-4| = |x^2-9| = |x+3||x-3|.$$

Αν περιορίσουμε το δ έτσι ώστε $\delta \leq 1$, τότε

$$\begin{aligned}
&|x-3| < \delta \Rightarrow |x-3| < 1 \Rightarrow 2 < x < 4 \Rightarrow \\
&5 < x+3 < 7 \Rightarrow -7 < x+3 < 7 \Rightarrow \\
&|x+3| < 7 \Rightarrow |x+3||x-3| < 7|x-3|.
\end{aligned}$$

Αρα $|(x^2-5)-4| < \epsilon$ αν $7|x-3| < \epsilon$. Δηλαδή, αν $|x-3| < \frac{\epsilon}{7}$.
Επομένως $\delta = min\left(\frac{\epsilon}{7}, 1\right)$.