2. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

2.1 Εισαγωγή

Σταθερές - μεταβλητές

(i) Στον ορισμό του διαστήματος (a, b), καθένα από τα σύμβολα a και b αντιπροσωπεύει ένα συγκεκριμένο αριθμό και καλείται **σταθερά**.

(ii) Οταν έχουμε $x \in (a, b)$, το σύμβολο x αντιπροσωπεύει οποιοδήποτε αριθμό που ανήκει στο διάστημα (a, b) και καλείται **μεταβλητή**. Το διάστημα (a, b) καλείται **πεδίο μεταβολής** της μεταβλητής.

Σχέση (απεικόνιση)

Δύο στοιχεία που ανήκουν στο ίδιο ή σε διαφορετικά σύνολα μπορεί να συνδέονται λογικά, δηλαδή να συσχετίζονται.

Εστω A και B δύο μη κενά σύνολα και έστω ένας συγκεκριμένος τρόπος με τον οποίο μπορεί τουλάχιστο ένα $x \in A$ να συσχετίζεται με ένα ή περισσότερα $y \in B$. Τότε θα λέμε ότι ορίζεται μια **σχέση** από το A στο B.

Συνάρτηση (function)

Η έννοια της συνάρτησης είναι μια από τις πιο θεμελιώδεις μαθηματικές έννοιες, η οποία ορίζεται ως μια ειδική σχέση.

Ορισμός: Μια σχέση, την οποία συμβολίζουμε με f, από Α στο Β καλείται **συνάρτηση** τότε και μόνο τότε, αν για κάθε $x \in A$ βρίσκεται στη σχέση f **με ένα και μόνο ένα** $y \in B$.

Δηλαδή, το y είναι η τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$. Γράφουμε

$$y = f(x).$$

Η μεταβλητή x καλείται **ανεξάρτητη μεταβλητή** και η y καλείται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

Σε μια συνάρτηση $y = f(x)$, το σύνολο των επιτρεπομένων τιμών του x καλείται **πεδίο ορισμού** (domain) και οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης $f(x)$ **πεδίο τιμών** (range) της f.

Παράδειγμα: Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών των πιο κάτω συναρτήσεων:

(Το πεδίο ορισμού πολλών συναρτήσεων είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών, αν ληφθούν υπόψη μόνο οι Μαθηματικοί περιορισμοί. Η ύπαρξη φυσικών ή γεωμετρικών η άλλων περιορισμών μπορεί να περιορίσει και το πεδίον ορισμού με διάφορους τρόπους)

Τεχνικές εύρεσης του πεδίου τιμών

(α) **Με απλή διερεύνηση: Παράδειγμα**:

(β) **Επίλυση ως προς x: Παράδειγμα**:

Συναρτήσεις ορισμένες τμηματικά: Είναι συναρτήσεις που ορίζονται με δύο ή περισσότερους τύπους. Για παράδειγμα,

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases} \tag{i}$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < -1 \\ 2, & x = -1 \\ x^2, & x > -1 \end{cases} \tag{ii}$$

Συνάρτηση ένα προς ένα: Μια συνάρτηση f που ικανοποιεί τη συνθήκη:

$\forall x_1,\ x_2 \in$ πεδίο ορισμού της f

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

ή ισοδύναμα $\forall x_1,\ x_2 \in$ πεδίο ορισμού της f

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

καλείται **συνάρτηση ένα προς ένα** (1-1).

Παράδειγμα: Οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι ένα προς ένα:
(i) $f(x) = ax + b$
(ii) $f(x) = x^2$, αν $x \geq 0$
(iii) $f(x) = \cos x$, αν $x \in [0, \pi]$

2.2 Είδη συναρτήσεων

(α) **Πολυωνυμική συνάρτηση**: Η συνάρτηση

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

καλείται **πολυωνυμική συνάρτηση (πολυώνυμο)**, όπου $a_0,\ a_1, \ldots, a_n$ $(a_n \neq 0)$ είναι σταθερές και καλούνται **συντελεστές**. Η μεγαλύτερη δύναμη του x (δηλ. n) καλείται ο **βαθμός** του πολυωνύμου.

(β) **Ρητή συνάρτηση**: Η συνάρτηση

$$Q(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)},$$

όπου $P_1(x)$ και $P_2(x)$, $(\neq 0)$ είναι πολυώνυμα, καλείται **ρητή συνάρτηση**

(γ) **Αλγεβρική συνάρτηση**: Κάθε σχέση της μορφής

$$P_m(x) y^m + P_{m-1}(x) y^{m-1} + \ldots + P_1(x) y + P_0(x) = 0,$$

όπου $P_0(x),\ P_1(x), \ldots, P_m(x)$ είναι πολυώνυμα, ορίζει το y ως μια **αλγεβρική συνάρτηση** του x.

(δ) **Μη-αλγεβρικές συναρτήσεις**: Γνωστές συναρτήσεις όπως $\cos x$, e^x και $\log x$ δεν ορίζονται συναρτήσει ενός πεπερασμένου αριθμού πολυωνύμων. Τέτοιες συναρτήσεις καλούνται **μη-αλγεβρικές ή υπερβατικές** συναρτήσεις.

(ε) **Αρτια - περιττή συνάρτηση**: Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A $(A \to B)$ καλείται

(i) **άρτια** όταν $\forall x \in A$ ισχύει

$$-x \in A \quad \textit{και} \quad f(-x) = f(x)$$

(ii) **περιττή** όταν $\forall x \in A$ ισχύει

$$-x \in A \quad \textit{και} \quad f(-x) = -f(x)$$

Από τον πιο πάνω ορισμό συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των y και η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

(στ) **Περιοδική συνάρτηση**: Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A καλείται **περιοδική**, όταν $\exists T > 0$, τέτοιο ώστε $\forall x \in A$ ισχύει

$$x + T \in A \quad \text{και} \quad f(x+T) = f(x).$$

Ο αριθμός T καλείται **περίοδος** της συνάρτησης f.

(ζ) **Μονοτονικές συναρτήσεις**: Εστω ότι η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα και έστω $x_1,\ x_2$ σημεία του διαστήματος.

(i) Η συνάρτηση f καλείται **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα αν ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$ όταν $x_1 < x_2$.

Η συνάρτηση f καλείται **αύξουσα** στο διάστημα αν ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$ όταν $x_1 < x_2$.

(ii) Η συνάρτηση f καλείται **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα αν ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$ όταν $x_1 < x_2$.

Η συνάρτηση f καλείται **φθίνουσα** στο διάστημα αν ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$ όταν $x_1 < x_2$.

(η) **Πλεγμένη και μη-πλεγμένη συνάρτηση**: Μια συνάρτηση που γράφεται στη μορφή $y = f(x)$ καλείται **μη-πλεγμένη συνάρτηση**. Μια συνάρτηση που έχει τη μορφή $f(x, y) = 0$ καλείται **πλεγμένη συνάρτηση**.

2.3 Πράξεις με συναρτήσεις

Αν $f,\ f_1,\ f_2$ συναρτήσεις, ορίζεται

το **άθροισμα** $f_1 + f_2$ των συναρτήσεων f_1 και f_2, με

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

η **αντίθετη** της f, με

$$(-f)(x) = -f(x)$$

η **διαφορά** $f_1 - f_2$, με

$$(f_1 - f_2)(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

το **γινόμενο** λf του $\lambda \in \mathbb{R}$ επί την f, με

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

το **γινόμενο** $f_1 f_2$ των συναρτήσεων f_1 και f_2, με

$$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$$

ο **λόγος (πηλίκο)** $\frac{f_1}{f_2}$, με

$$\frac{f_1}{f_2}(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}, \quad f_2(x) \neq 0$$

Οι συναρτήσεις $f_1 \pm f_2$ και $f_1 f_2$ έχουν πεδίο ορισμού την τομή των πεδίων ορισμού των f_1 και f_2 και η συνάρτηση $\frac{f_1}{f_2}$ έχει επίσης την τομή με εξαίρεση τα σημεία εκείνα όπου $f_2(x) = 0$.

Παράδειγμα:

Σύνθεση συναρτήσεων: Εστω δύο συναρτήσεις f_1 και f_2. Η σύνθεση της f_2 με την f_1, η οποία συμβολίζεται με $f_1 \circ f_2$, ορίζεται ως

$$(f_1 \circ f_2)(x) = f_1(f_2(x))$$

Γενικά, **δεν** ισχύει $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$.

Το πεδίο ορισμού της $f_1 \circ f_2$ δεν είναι ολόκληρο το πεδίο ορισμού της f_1, αλλά περιορίζεται στις τιμές του x για τις οποίες η $f_2(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της $f_1(x)$.

Παράδειγμα:

2.4 Γραφική παράσταση συνάρτησης

Αν $y = f(x)$ είναι συνάρτηση από $A \to B$, τότε σε κάθε $x \in A$ αντιστοιχεί ένα $y \in B$. Αρα $\forall x \in A$ ορίζεται ένα διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (x, y) το οποίο παριστάνεται με ένα σημείο στο επίπεδο (σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων). Το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (x, y) στο επίπεδο καλείται **γραφική συνάρτηση** της συνάρτησης f.

Παράδειγμα: Γραφική παράσταση της $y = \mathrm{e}^x$

Γραφική παράσταση της $y = \log x$

Μετατόπιση:

Υποθέτουμε ότι το σχήμα (i) δίνει την γραφική παράσταση γνωστής συνάρτησης $f(x)$. Τότε η γραφική παράσταση της $y = f(x) + a$, όπου a θετική σταθερά, δίνεται από το σχήμα (ii).

Δηλαδή, για να παραστήσουμε γραφικά την $y = f(x) + a$, μετατοπίζουμε τον άξονα των x απόσταση a προς τα κάτω στην γραφική παράσταση της $y = f(x)$. Ανάλογα αποτελέσματα για τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) - a,\ f(x + a),\ f(x - a)$.

Ο άξονας των x έχει μετατοιστεί απόσταση a προς τα πάνω.

Ανάκλαση: Γραφικές παραστάσεις των $y = f(-x)$ και $y = -f(x)$

Η γραφική παράσταση της $y = f(-x)$ είναι η ανάκλαση της $y = f(x)$ πάνω στον άξονα των y. (Διαφορετικά, καλείται το **είδωλο** της $y = f(x)$ ως προς τον άξονα των y.)

Η γραφική παράσταση της $y = -f(x)$ είναι η ανάκλαση της $y = f(x)$ πάνω στον άξονα των x. (Διαφορετικά, καλείται το **είδωλο** της $y = f(x)$ ως προς τον άξονα των x.)

Αλλαγή κλίμακος: Γραφικές παραστάσεις των $y = af(x),\ y = f(ax),\ a > 0$

Εστω $f(x) = \sin x$

2.5 Αντίστροφη συνάρτηση

Ορισμός: Αν οι συναρτήσεις f και g ικανοποιούν τη συνθήκη

$$f(g(x)) = x, \quad \forall x \in A,$$

όπου A είναι το πεδίο ορισμού της g, τότε θα λέμε ότι η συνάρτηση $g(x)$ είναι η **αντίστροφη συνάρτηση** της $f(x)$.

Θα συμβολίζουμε την αντίστροφη της f με f^{-1}.

ΠΡΟΣΟΧΗ! $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $f(x) = x^2,\ x \geq 0$, έχει ως αντίστροφη την $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ επειδή

$$f(f^{-1}(x)) = [f^{-1}(x)]^2 = (\sqrt{x})^2 = x.$$

Θεώρημα: Αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει αντίστροφη, τότε οι γραφικές παραστάσεις των $y = f(x)$ και $y = f^{-1}(x)$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

Θεώρημα: Η συνάρτηση $f(x)$ έχει αντίστροφη αν και μόνο αν είναι ένα προς ένα.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ δεν έχει αντίστροφη επειδή δεν είναι ένα προς ένα, ενώ η $f(x) = x^2,\ x \geq 0$ έχει αντίστροφη επειδή είναι ένα προς ένα.

Θεώρημα: Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι αύξουσα ή φθίνουσα, τότε έχει αντίστροφη.

Εύρεση του τύπου της f^{-1} όταν δίνεται ο τύπος της f

Για να βρούμε τον τύπο της f^{-1} (αν ορίζεται) ακολουθούμε τα πιο κάτω βήματα:

1. Λύουμε τον τύπο $y = f(x)$ ως προς x

2. Εναλλάσουμε το x με το y.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η αντίστροφη της $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

Σημείωση: Δεν είναι πάντοτε δυνατό να βρούμε τον τύπο της f^{-1}. Για παράδειγμα, για την $f(x) = x^5 + 3x^3 + 5$, η οποία έχει αντίστροφη, δεν είναι εύκολο να βρούμε τον τύπο της f^{-1}.

Πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών της f^{-1}

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι ίσο με το πεδίο τιμών της $f(x)$ και το πεδίο τιμών της f^{-1} είναι ίσο με το πεδίο ορισμού της $f(x)$.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η αντίστροφη της $f(x) = -\sqrt{2x-4}$ και στη συνέχεια να βρεθεί το πεδίο ορισμού και τιμών της $f^{-1}(x)$.

2.6 Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Επειδή οι έξι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι περιοδικές, υπάρχουν άπειρες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής (x) για τις οποίες έχουμε την ίδια τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής (y). Αρα δεν είναι ένα προς ένα συναρτήσεις όταν $x \in \mathbb{R}$. Επομένως δεν έχουν αντίστροφες συναρτήσεις όταν $x \in \mathbb{R}$.

Εστω $y = \sin x$.

Απο τη γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι η $y = \sin x$ είναι ένα προς ένα όταν $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Αρα έχει αντίστροφη στο διάστημα αυτό. Η αντίστροφη του ημιτόνου καλείται **αντίστροφο ημίτονο** (ή τόξο ημιτόνου) και συμβολίζεται με $\sin^{-1}$ (ή arcsin). Το πεδίο ορισμού της $y = \sin^{-1} x$ είναι το πεδίον τιμών της $y = \sin x$, δηλαδή το [-1,1]. Το πεδίο τιμών της $y = \sin^{-1} x$ είναι το πεδίο ορισμού της $y = \sin x$, δηλαδή το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Αρα

$$y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow x = \sin y.$$

επειδή η $\sin^{-1} x$ είναι η αντίστροφη της $\sin x$ όταν είναι περιορισμένη στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, έχουμε

$$\sin^{-1}(\sin x) = x \quad \alpha\nu \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$\sin(\sin^{-1} x) = x \quad \alpha\nu \quad x \in [-1, 1]$$

Ανάλογα ορίζουμε τις άλλες πέντε αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις:

$\cos^{-1} x$ είναι η αντίστροφη της $\cos x$ με πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και πεδίο τιμών το $[0, \pi]$

$$y = \cos^{-1} x \Leftrightarrow x = \cos y$$

$\tan^{-1}$ είναι η αντίστροφη της $\tan x$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και πεδίο τιμών το $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow x = \tan y.$$

$\cot^{-1} x$ είναι η αντίστροφη της $\cot x$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και πεδίο τιμών το $(0, \pi)$.

$\sec^{-1}$ είναι η αντίστροφη της $\sec x$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ και πεδίο τιμών το $[0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2})$.

$\mathrm{cosec}^{-1}(x)$ είναι η αντίστροφη της $\mathrm{cosec} x$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ και πεδίο τιμών το $(-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup (0, \frac{\pi}{2}]$

Γραφικές παραστάσεις

Γνωρίζουμε ότι τα διαγράμματα μιας συνάρτησης και της αντίστροφης της είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y = x$. Αρα μπορούμε να σχηματίσουμε τα διαγράμματα των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων με τη βοήθεια των αντίστοιχων τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Ταυτότητες

Εστω ότι $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, τότε $\sin \alpha = \cos \beta$. Θέτουμε $x = \sin \alpha = \cos \beta$. Αρα $\alpha = \sin^{-1} x$, $\beta = \cos^{-1} x$. Επομένως

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\sec^{-1} x + \mathrm{cosec}^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

Παράδειγμα: Να αποδειχτεί ότι

(i) $\cot^{-1} x = \tan^{-1} \frac{1}{x}$

(ii) $\sec^{-1} x = \cos^{-1} \frac{1}{x}$

(iii) $\csc^{-1} x = \sin^{-1} \frac{1}{x}$