14 ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

14.1 Εισαγωγή: Οι μιγαδικοί αριθμοί είναι γενίκευση των πραγματικών αριθμών. Συνήθως συμβολίζονται με z και ορίζονται συναρτήσει διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών (x, y) και του **φανταστικού αριθμού** $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ έτσι ώστε

$$z = x + \mathrm{i}y.$$

Αυτή η μορφή καλείται **συνήθης**.

Το x καλείται **πραγματικό μέρος** και συμβολίζεται με $\operatorname{Re} z$.

Το y καλείται **φανταστικό μέρος** και συμβολίζεται με $\operatorname{Im} z$.

Μιγαδικοί αριθμοί της μορφής $z = \mathrm{i}y$ καλούνται **γνήσιοι φανταστικοί**.

Κάθε μιγαδικός αριθμός, αφού ορίζεται συναρτήσει ενός διατεταγμένου ζεύγου πραγματικών αριθμών, αντιπροσωπεύει ένα σημείο στο επίπεδο και αντίθετα.

Εστω το ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy.

Ο άξονας των x καλείται **πραγματικός άξονας**, ο άξονας των y καλείται **φανταστικός άξονας**. Ολόκληρο το διάγραμμα καλείται **διάγραμμα του Argand**. Από το σχήμα παρατηρούμε ότι

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

και επομένως ο μιγαδικός αριθμός μπορεί να γραφτεί και στη μορφή

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

η οποία καλείται **πολική μορφή**. Ο αριθμός r (απόσταση του z από την αρχή Ο) καλείται **μέτρο ή απόλυτη τιμή** του z και συμβολίζεται με $|z|$ ή $\operatorname{mod} z$. Σημειώνουμε ότι $|z| \geq 0$. Η γωνία θ καλείται **όρισμα** του z και συμβολίζεται με $\arg z$. Παρατηρούμε ότι η γωνία θ δεν είναι μοναδική επειδή οι γωνίες $\theta + 2k\pi$ (k ακέραιος) είναι ορίσματα του ιδίου μιγαδικού αριθμού. Ορίζουμε τη **πρωτεύουσα τιμή** του ορίσματος του z την τιμή του θ που ανήκει στο διάστημα

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

και τη συμβολίζουμε με Arg z.
Τώρα, για ένα μιγαδικό αριθμό

$$z = x + \mathrm{i}y$$

το μέτρο είναι ίσο με

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

και το όρισμα είναι ίσο με

$$\mathrm{Arg}\ z = \tan^{-1}\frac{y}{x}.$$

Ενας σημαντικός μιγαδικός αριθμός που σχετίζεται με κάθε μιγαδικό αριθμό z, είναι ο **μιγαδικός συζυγής** $\bar{z}$. Αν $z = x + \mathrm{i}y$, τότε ο $\bar{z}$ ορίζεται ως

$$\bar{z} = x - \mathrm{i}y.$$

Παρατηρούμε ότι $|z| = |\bar{z}|$ και στο διάγραμμα του Argand ο συζυγής $\bar{z}$ είναι το είδωλο του z πάνω στον πραγματικό άξονα.

14.2 Πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς

Εστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ και $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$.

(i) Οι μιγαδικοί αριθμοί z_1 και z_2 είναι ίσοι αν $x_1 = x_2$ και $y_1 = y_2$.

(ii) Το άθροισμα (ή διαφορά) των z_1 και z_2 ορίζεται ως

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2).$$

Οπως και για τους πραγματικούς αριθμούς ισχύουν

αντιμεταθετική ιδιότητα: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

προσεταιριστική ιδιότητα: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$, όπου z_3 είναι ένας οποιοσδήποτε μιγαδικός αριθμός.

(iii) Το γινόμενο των z_1 και z_2 είναι ίσο με

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) \\ &= x_1 x_2 + \mathrm{i}x_1 y_2 + \mathrm{i}x_2 y_1 + \mathrm{i}^2 y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

Οπως και για τους πραγματικούς αριθμούς ισχύουν

αντιμεταθετική ιδιότητα: $z_1 z_2 = z_2 z_1$

προσεταιριστική ιδιότητα: $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$, όπου z_3 είναι ένας οποιοσδήποτε μιγαδικός αριθμός.

Τώρα, έστω $z = x + \mathrm{i}y$, τότε $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$ και

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = r^2 = |z|^2$$

και επειδή $|z|$ είναι πάντοτε θετικό,

$$|z|z = \sqrt{z\bar{z}}$$

Ανάλογα,

$$|z^n| = (z^n \bar{z}^n)^{\frac{1}{2}} = (z\bar{z})6\frac{n}{2} = |z|^n, \quad n \in \mathbb{R}.$$

Επίσης

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2$$

και επομένως

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|.$$

Εστω ότι ο z_1 έχει μέτρο r_1 και όρισμα $theta_1$ και ο z_2 έχει μέτρο r_2 και όρισμα θ_2. Τότε

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)\right] \end{aligned}$$

Δηλαδή, ο μιγαδικός αριθμός z_1z_2 έχει μέτρο r_1r_2 και όρισμα $\theta_1+\theta_2$.
(iv) Η **διαίρεση** $\frac{z_1}{z_2}$ εκτελείται αφού πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρονομαστή με $\bar{z}_2$. Εχουμε

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}\frac{(x_2-\mathrm{i}y_2)}{(x_2-\mathrm{i}y_2)}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{i}(y_1x_2-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

Τώρα,

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2=\frac{z_1\bar{z}_1}{z_2\bar{z}_2}=\frac{|z_1|^2}{|z_2|^2}.$$

Αρα

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Ο αριθμός $\frac{z_1}{z_2}$ σε πολική μορφή γράφεται

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

Παράδειγμα: Εστω $z_1=-1-\mathrm{i}$ και $z_2=\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Να βρεθούν: (i) z_1+z_2 (ii) z_1z_2 (iii) $\frac{z_2}{z_1}$
Οι απαντήσεις στο (ii) και (iii) να γραφτούν σε πολική μορφή.
Λύση:

14.3 Εκθετική μορφή μιγαδικού αριθμού

Εστω η συνάρτηση

$$f(\theta) = \cos\theta + \mathrm{i}\theta.$$

Παραγωγίζουμε ως προς θ

$$f'(\theta) = -\sin\theta + \mathrm{i}\cos\theta = \mathrm{i}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin theta) \Rightarrow$$

$$f'(\theta) = \mathrm{i}f(\theta)$$

Αρα η παράγωγος της f είναι ανάλογη της f. Επομένως

$$f(\theta) = k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Θέτουμε $k = 1$ για να βρούμε

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta.$$

Επομένως κάθε μιγαδικός αριθμός γράφεται στην εκθετική μορφή

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Αντικαθιστούμε στην

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$$

το i με $-\mathrm{i}$ για να βρούμε τη συζηγή μορφή

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta$$

Προσθέτουμε και αφαιρούμε τις δύο τελευταίες σχέσεις, για να βρούμε

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}, \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$$

Θεώρημα De Moivre: Για κάθε ακέραιο αριθμό n, ισχύει

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}sinn\theta.$$

Απόδειξη:

$$\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n.$$

Παράδειγμα: Να εκφραστεί ο αριθμός $-1 + \mathrm{i}$ σε εκθετική μορφή. Στη συνέχεια να γραφτεί ο αριθμός $(-1 + \mathrm{i})^{-8}$ σε συνήθη μορφή.

14.4 Εφαρμογές

Εφαρμογές στη τριγωνομετρία

Παράδειγμα: Να αποδειχτεί ότι

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$
$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$$

Παράδειγμα: Να εκφραστεί το $\cos 5\theta$ συναρτήσει δυνάμεων του $\cos\theta$.

Επίλυση εξισώσεων

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση

$$z^6 - 1 = 0.$$

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση

$$z^4 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Υπολογισμός αθροισμάτων σειρών

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς

$$1 + \cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{2!} + \frac{\cos 3\theta}{3!} + \dots$$

Υπολογισμός ολοκληρωμάτων

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \cos x \mathrm{e}^x \mathrm{d}x.$$

14.5 Σχέση μεταξύ υπερβολικών και τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Εστω οι σειρές Maclaurin των συναρτήσεων $\cos x$, $\sin x$, $\cosh x$, $\sinh x$:

$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots
\end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι $\mathrm{i}^{4n} = 1$ και $\mathrm{i}^{(4n-2)} = -1$. Αν αντικατιστήσουμε στη σειρά του $\cos x$ το x με $\mathrm{i}x$, θα βρούμε

$$\begin{aligned}
&\cos \mathrm{i}x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots \Rightarrow \\
&\cos \mathrm{i}x = \cosh x
\end{aligned}$$

Αν αντικατιστήσουμε στη σειρά του $\sin x$ το x με $\mathrm{i}x$, θα βρούμε

$$\sin \mathrm{i}x = \mathrm{i}\left[x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots\right] \Rightarrow$$

$$\sin \mathrm{i}x = \mathrm{i}\sinh x$$

Ανάλογα, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
\cosh \mathrm{i}x &= \cos x \\
\sinh \mathrm{i}x &= \mathrm{i}\sin x
\end{aligned}$$

Παράδειγμα: Χρησιμοποιώντας τις πιο πάνω σχέσεις να αποδειχτούν οι ταυτότητες:

$$\begin{aligned}
&\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \\
&\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x
\end{aligned}$$