13 ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

13.1 Εισαγωγή

Μια σειρά της μορφής

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots c_k x^k + \ldots$$

όπου x είναι πραγματική μεταβλητή και $c_0,\ c_1,\ c_2, \ldots$ είναι σταθερές, καλείται **δυναμοσειρά**.

Μια δυναμοσειρά ορίζει μια συνάρτηση $f(x)$ της μεταβλητής x, με πεδίο ορισμού **μόνο** τις τιμές του x για τις οποίες η σειρά συγκλίνει.

Παράδειγμα: Η δυναμοσειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^k \ldots$$

ορίζει για κάθε τιμή του x μια γεωμετρική σειρά με λόγο x. Επομένως η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο για τιμές του x στο διάστημα $-1 < x < 1$. Αρα η πιο πάνω δυναμοσειρά ισούται με $\dfrac{1}{1-x}$. Δηλαδή,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^k \ldots = \frac{1}{1-x}, \quad \text{μόνο όταν } x \in (-1, 1).$$

Πρόβλημα: Για ποιές τιμές του x μια δυναμοσειρά $\sum c_k x^k$ συγκλίνει;

Θεώρημα: Για κάθε δυναμοσειρά $\sum c_k x^k$ ισχύει **ένα** από τα πιο κάτω:

(i) Η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο για $x = 0$.

(ii) Η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα για όλες τις τιμές του x.

(iii) Υπάρχει θετικός αριθμός, R, έτσι ώστε η δυναμοσειρά να συγκλίνει απόλυτα για $-R < x < R$, ενώ αποκλίνει για $x < -R$ ή $x > R$. Στα σημεία $x = R$ και $x = -R$ η δυναμοσειρά μπορεί να συγκλίνει σχετικά ή απόλυτα ή να αποκλίνει.

Ο θετικός αριθμός R στη περίπτωση (iii) καλείται **ακτίνα σύγκλισης** και το διάστημα $(-R, R)$ καλείται **διάστημα σύγκλισης**. Στις περιπτώσεις (i) και (ii) λέμε ότι η ακτίνα σύγκλισης είναι μηδενική ($R = 0$) και άπειρη ($R = +\infty$), αντίστοιχα.

Δηλαδή, το πρόβλημα που τίθεται τώρα, είναι ο υπολογισμός της ακτίνας σύγκλισης R, ο οποίος γίνεται με εφαρμογή των κριτηρίων σύγκλισης των σειρών.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης των πιο κάτω δυναμοσειρών:

$$\text{(i)}\ \sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k, \quad \text{(ii)}\ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{\log k}, \quad \text{(iii)}\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν και για τις δυναμοσειρές της μορφής

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_k(x-a)^k \ldots$$

τα οποία αναφέρονται στο πιο κάτω θεώρημα:

Θεώρημα: Για κάθε δυναμοσειρά $\sum c_k(x-a)^k$ ισχύει **ένα** από τα πιο κάτω:

(i) Η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο για $x = a$.

(ii) Η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα για όλες τις τιμές του x.

(iii) Υπάρχει θετικός αριθμός, R, έτσι ώστε η δυναμοσειρά να συγκλίνει απόλυτα για $a - R < x < a + R$, ενώ αποκλίνει για $x < a - R$ ή $x > a + R$. Στα σημεία $x = a - R$ και $x = a + R$ η δυναμοσειρά μπορεί να συγκλίνει σχετικά ή απόλυτα ή να αποκλίνει.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(x-3)^k \log k}{k}$.

13.2 Σειρές Taylor και Maclaurin

Πολυώνυμο Maclaurin: Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη n φορές στο σημείο $x = 0$, τότε ορίζουμε το πολυώνυμο Maclaurin της f ως

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Το $P_n(x)$ θεωρείται ως πολυωνυμική προσέγγιση της συνάρτησης $f(x)$.

Παράδειγμα: Να βρεθεί πολυώνυμο Maclaurin τέταρτου βαθμού ($n = 4$) της $f(x) = \tan^{-1} x$.

Πολυώνυμο Taylor: Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη n φορές στο σημείο $x = a$, τότε ορίζουμε το πολυώνυμο Taylor της f στο σημείο $x = a$ ως

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί πολυώνυμο Taylor τρίτου βαθμού ($n = 3$) για τη συνάρτηση $f(x) = \cosh x$ στο σημείο $x = \log 2$.

Σειρά Taylor: Αν για την συνάρτηση f υπάρχουν οι παράγωγοι κάθε τάξης στο σημείο $x = a$, τότε ορίζουμε τη σειρά Taylor της f στο $x = a$ ως

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 \ldots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-$$

όπου $x \in \Delta$ (Δ είναι το διάστημα σύγκλισης).

Αν θέσουμε $a = 0$ στη σειρά Taylor, τότε προκύπτει η σειρά Maclaurin.

Παράδειγμα: Να βρεθςί η σειρά Maclaurin της $f(x) = \sinh x$.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η σειρά Taylor της $f(x) = \mathrm{e}^x$ στο $x = 2$.

13.3 Ανάπτυγμα Taylor με υπόλοιπο

Αν το πολυώνυμο Taylor $P_n(x)$ είναι κατά προσέγγιση ίσο με τη συνάρτηση f, τότε το σφάλμα στο σημείο x είναι ίσο με

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Συνεπώς έχουμε

Θεώρημα (Θεώρημα του Taylor): Εστω ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη $(n+1)$ φορές σε κάθε σημείο ενός διαστήματος που περιέχει το σημείο a και έστω

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

είναι πολυώνυμο Taylor νιοστού βαθμού της f στο $x = a$. Τοτε για κάθε x στο διάστημα υπάρχει τουλάχιστο ένα σημείο c μεταξύ του a και του x τέτοιο ώστε

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}c}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Το $R_n(x)$ καλείται **υπόλοιπο της μορφή Lagrange**. Επομένως από τον πιο πάνω τύπο έχουμε

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

Δηλαδή,

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

το οποίον καλείται **ανάπτυγμα Taylor με υπόλοιπο**.

Αν στο πιο πάνω αποτέλεσμα θέσουμε $a = 0$, τότε προκύπτει το **ανάπτυγμα Maclaurin με υπόλοιπο** .

Σημείωση: Στο θεώρημα Taylor η πρόταση "μεταξύ a και x" σημαίνει ότι $c \in (a, x)$ αν $x > a$ ή $c \in (x, a)$ αν $x < a$ ή $c = a$ αν $x = a$.

Παράδειγμα: Για τις πιο κάτω συναρτήσεις να βρεθεί το υπόλοιπο της μορφής Lagrange

(i) $\sinh x, \quad a = 0, \; n = 6$, (ii) $\dfrac{1}{x}, \quad a = 1, \; n = 5$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το $R_n(x)$ της $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ όταν $x = 0$.

Σύγκλιση σειράς Taylor: Η σειρά Taylor της συνάρτησης f συγκλίνει στην $f(x)$ στα σημεία εκείνα στα οποία το υπόλοιπο τείνει στο μηδέν. Δηλαδή, έχουμε το πιο κάτω αποτέλεσμα:

Θεώρημα: Η ισότητα

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

ισχύει αν και μόνο αν

$$\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0.$$

Παράδειγμα: Να δειχτεί ότι η σειρά Taylor της e^x στο $x = 1$ συγκλίνει στο e^x για όλες τις τιμές του x.

Υπόδειξη: $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \frac{x^k}{k!} = 0$

13.4 Υπολογισμός σειράς Maclaurin με αντικατάσταση

Στον πιο κάτω πίνακα δίνονται ορισμένες σειρές Maclaurin βασικών συναρτήσεων. Επίσης δίνεται το δ ιάστημα στο οποίο η σειρά συγκλίνει στη συνάρτηση.

$$\frac{1}{x-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots \qquad -1 < x < 1$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{(k+1)} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \qquad -1 < x < 1$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \qquad -\infty < x < +\infty$$

Με τη χρήση αυτών των σειρών ή/και τη χρήση άλλων βασικών σειρών μπορούμε να υπολογίσουμε τις σειρές Maclaurin πολλών άλλων συναρτήσεων.

Παράδειγμα: Με τη χρήση του πιο πάνω πίνακα να βρεθούν οι πρώτοι τέσσεροι όροι της σειράς Maclaurin των πιο κάτω συναρτήσεων. Επίσης να δοθεί το διάστημα σύγκλισης.

Τύπος του Δυωνύμου

Αν m είναι πραγματικός αριθμός, τότε η σειρά Maclaurin για τη συνάρτηση $(1+x)^m$ καλείται **Δυώνυμο** και είναι ίση με

$$\begin{aligned}(1+x)^m &= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}x^k, \qquad |x|<1\\ &= 1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\dots\end{aligned}$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η σειρά Maclaurin της $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$.

13.5 Παραγώγιση και ολοκλήρωση δυναμοσειρών

Μια δυναμοσειρά με μη μηδενική ακτίνα σύγκλισης ($R \neq 0$) παριστάνει μια συνάρτηση στο διάστημα σύγκλισης.

Θεώρημα (Παραγώγιση δυναμοσειράς): Αν μια συνάρτηση παριστάνεται σε κάποιο διάστημα $a - R < x < a + R$ με δυναμοσειρά της μορφής

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

τότε η f είναι παραγωγίσιμη και η f' παριστάνεται με τη δυναμοσειρά που προκύπτει από τη παρ αγώγιση της f όρο προς όρο. Δηλαδή,

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[c_k (x-a)^k\right] = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (x-a)^{k-1}$$

με διάστημα σύγκλισης $a - R < x < a + R$.

Παράδειγμα: Με βάση το πιο πάνω θεώρημα να δειχτεί ότι

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\log(1+x)\right] = \frac{1}{x+1}.$$

Θεώρημα (Ολοκλήρωση δυναμοσειράς): Αν μια συνάρτηση παριστάνεται σε κάποιο διάστημα $a - R < x < a + R$ με δυναμοσειρά της μορφής

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

τότε το ολοκλήρωμα της παριστάνεται με τη δυναμοσειρά που προκύπτει από την ολοκλήρωση της f όρ ο προς όρο. Δηλαδή,

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int c_k (x-a)^k \mathrm{d}x\right] + c = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + c$$

με διάστημα σύγκλισης $a - R < x < a + R$.
Επίσης για όλες τις τιμές των β και γ στο διάστημα $(a-R, a+R)$ η σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{\beta}^{\gamma} c_k (x-a)^k \mathrm{d}x\right]$$

συγκλίνει απόλυτα και

$$\int_{\beta}^{\gamma} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{\beta}^{\gamma} c_k (x-a)^k \mathrm{d}x\right]$$

Παράδειγμα: Με βάση το πιο πάνω θεώρημα να δειχτεί ότι

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \log(1+x) + c.$$

Οπως μπορούμε να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε δύο δυναμοσειρές, έτσι μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε δύο δυναμοσειρές ως πολυώνυμα.

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι πρώτοι τέσσερεις μη μηδενικοί όροι της σειράς Maclaurin των συναρτήσεων: (i) $\dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^x}$ (ii) $\tanh x$

Παράδειγμα: (i) Με τη χρήση της σχέσης $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c$ να βρεθούν οι τέσσερεις πρώτοι όροι της σειράς Maclaurin της $\sin^{-1} x$.

(ii) Να εκφραστεί η σειρά σε Σ-συμβολισμό.

(iii) Να δοθεί η ακτίνα σύγκλισης.