12 ΑΠΕΙΡΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

12.1 Εισαγωγή

Ορσμός: Αν (a_n) είναι μια ακολουθία, μπορούμε να σχηματίσουμε μια νέα ακολουθία (S_n) παίρνοντας τα αθροίσματα

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ \ldots,\ S_n = a_1 + a_2 + \ldots + A_n,\ \ldots$$

Η ακολουθία (S_n) καλείται **σειρά** και συμβολίζεται με

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Ο αριθμός a_n καλείται **νιοστός όρος** της σειράς, ενώ οι αριθμοί S_n καλούνται **μερικά αθροίσματα της σειράς**.

Αν η ακολουθία (S_n) συγκλίνει σε ένα αριθμό L, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει στον αριθμό L ή ότι το άθροισμά της είναι ίσο με L και γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L \quad \text{ή} \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = L$$

Αν δεν υπάρχει το τέτοιο όριο λέμε ότι η σειρά αποκλίνει.

Γεωμετρική σειρά

Η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^k + \ldots$$

καλείται **γεωμετρική σειρά**, και χαραρακτηρίζεται με την ιδιότητα ότι ο λόγος δύο διαδοχικών όρων είναι σταθερός. Το μερικό άθροισμα είναι ίσο με

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a\frac{1-r^n}{1-r}, \quad r \neq 1.$$

Η γεωμετρική σειρά συκλίνει αν $|r| < 1$ και

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \frac{a}{r-1}$$

και αποκλίνει αν $|r| \geq 1$.

Αρμονική σειρά - p-σειρά

Η **αρμονική σειρά**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

είναι μια από τις πιο γνωστές σειρές που δεν συγκλίνουν. Η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s},$$

όπου s είναι θετικός αριθμός, συκλίνει αν $s > 1$ (και αποκλίνει αν $0 < s \leq 1$) και καλείται **p - σειρά**.

Παράδειγμα: Να εξεταστεί αν οι πιο κάτω σειρές συγκλίνουν

$$\text{(i)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k+2} \quad \text{(ii)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4}\right) \quad \text{(iii)} \ \sum_{k=3}^{\infty} \frac{5}{k-2}$$

Παράδειγμα: Να γραφτεί ως ρητος αριθμός ο δεκαδικός $0.45114141414\ldots$.

Παράδειγμα: Να αποδειχτεί ότι

$$\sum_{k=2}^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = -\log 2.$$

12.2 Κριτήρια αύγκλισης

Θεώρημα (κριτήριο απόκλισης): Αν $\lim_{k\to+\infty} u_k \neq 0$, τότε η σειρά $\sum_k u_k$ αποκλίνει.

ΠΡΟΣΟΧΗ! Δεν ισχύει γενικά το αντίστροφο. Δηλαδή, για να αποδείξουμε ότι μια σειρά συγκλίνει δεν είναι αρκετό να δείξουμε ότι $\lim_{k\to+\infty} u_k = 0$.

Παράδειγμα: Να εξεταστεί αν οι πιο κάτω σειρές συγκλίνουν

$$\text{(i)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k+2} \qquad \text{(ii)} \ \sum_{k=2}^{\infty} \log k$$

Αλγεβρικές ιδιότητες των σειρών: Αναφέρουμε τις πιο κάτω χρήσιμες πράξεις **μεταξύ σειρών που συγκλίνουν**:

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} v_k$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} cu_k = c \sum_{k=1}^{\infty} u_k$, όπου c είναι σταθερά.

Επίσης ανα φέρουμε την πιο κάτω ιδιότητα:

(iii) Σύγκλιση ή απόκλιση μιας σειράς δεν επηρεάζεται από την αφαίρεση ενός πεπερασμένου αριθμού όρων από την αρχή της σειράς. Δηλαδή, οι σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

και

$$\sum_{k=I}^{\infty} u_k = u_I + u_{I+1} + u_{I+2} + \ldots, \quad I \in \mathbb{N}$$

και οι δύο συγκλίνουν ή και οι δύο αποκλίνουν. Ετσι ο **αθροιστικός δείκτης** δεν είναι απαραίτητο να αρχίζει πάντοτε από $k = 1$.

Παράδειγμα: Οι σειρές με γενικούς όρους 2^{1-k} και 3^{1-k} συγκλίνουν επειδή είναι γεωμετρικές σειρές με $|r| < 1$. Επομένως θα συγκλίνει και η διαφορά τους,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{3^{k-1}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^{k-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Κριτήριο ολοκλήρωσης

Αν οι όροι $a_k \geq 0$ μιας μη αρνητικής σειράς δίνονται από τις τιμές $f(k)$ μιας μη αρνητικής συνάρτησης $f(x)$ που είναι φθίνουσα για $x \geq 1$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και το αντίστοιχο γενικευμένο ολοκλήρωμα αμφότερα συγκλίνουν ή αποκλίνουν.

Παράδειγμα: Να εξεταστεί αν οι πιο κάτω σειρές συγκλίνουν:

$$\text{(i)}\ \sum k = 1^{\infty}\frac{k}{1+k^2}, \quad \text{(ii)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4+2k)^{3/2}}, \quad \text{(iii)}\ \sum_{k=1}^{\infty} k\mathrm{e}^{-k^2}$$

Σημειώσεις: 1. Στα παραδείγματα (ii) και (iii) συμπεραίνουμε **μόνο** ότι οι σειρές συγκλίνουν, χωρίς να γνωρίζουμε το όριό τους. Δηλαδή,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4+2k)^{3/2}} \neq \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k\mathrm{e}^{-k^2} \neq \frac{1}{2\mathrm{e}}.$$

2. Το κάτω άκρο του ολοκληρώματος είναι ίσο με την αρχική τιμή που παίρνει ο αθροιστικός δείκτης.

Κριτήριο σύγκρισης

Αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποτελείται από μη αρνητικούς όρους τότε:

(i) η σειρά συγκλίνει αν υπάρχει μια συγκλίνουσα σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$, τέτοια ώστε να ισχύει $a_n \leq c_n$, $\forall n$ μεγαλύτερα από κάποιο N.

η σειρά αποκλίνει στο άπειρο αν υπάρχει μια αποκλίνουσα σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ με μη-αρνητικούς όρους, τέτοια ώστε να ισχύει $a_n \geq d_n$ μεγαλύτερα από κάποιο N.

Σημειώσεις: 1. Η σύγκλιση ή μη μιας σειράς δεν επηρεάζεται συνήθως από την αφαίρεση σταθερών όρων από τον παρονομαστή του γενικού όρου a_k. Για παράδειγμα, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^k+5}$ συμπεριφέρεται όπως η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^k}$.

2. Αν έχουμε πολυώνυμο του k ως κοινό παράγοντα στον αριθμητή ή παρονομαστή του a_k, αφαίρεση του πολυωνύμου εκτός από την μεγαλύτερη δύναμη του k, συνήθως δεν επηρεάζει την σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς. Για παράδειγμα, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k}{8k^3+2k^2-1}$ συμπεριφέρεται όπως η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} = \dfrac{k}{8k^3} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{8k^2}$.

Παράδειγμα: Να εξεταστεί αν οι πιο κάτω σειρές συγκλίνουν:

$$\text{(i)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{8k^3+2k^2-1}, \quad \text{(ii)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+8}}, \quad \text{(iii)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{4/3}}{8k^2+5k+1}$$

Παράδειγμα: Να εξεταστεί αν η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log k}{k^2}$ συγκλίνει.

Υπόδειξη: $\log x < \sqrt{x}$

Κριτήριο σύγκρισης (όριο)

Εστω ότι $\sum a_k$ και $\sum b_k$ είναι σειρές με θετικούς όρους και

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k}.$$

Αν το ρ είναι πεπερασμένο και διαφορετικό του μηδέν, τότε οι σειρές αμφότερες συγκλίνουν ή αμφότερες αποκλίνουν.

Παράδειγμα: Να εξεταστεί αν οι πιο κάτω σειρές συγκλίνουν

$$\text{(i)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k+6}, \quad \text{(ii)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)(k+5)}, \quad \text{(iii)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+3)^{17}}$$

Κριτήριο του λόγου

Εστω ότι $\sum u_k$ είναι σειρά με θετικού όρους και έστω ότι

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k}$$

(i) Αν $\rho < 1$, τότε η σειρά συγκλίνει.

(ii) Αν $\rho > 1$, τότε η σειρά αποκλίνει.

(iii) Αν $\rho = 1$, τότε δεν υπάρχει συμπέρασμα.

Παράδειγμα: Να εξεταστεί αν οι πιο κάτω σειρές συγκλίνουν

$$\text{(i)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!10^k}{3^k}, \quad \text{(ii)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^3+1}, \quad \text{(iii)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{e^{k^2}}$$

Κριτήριο της (νιοστής) ρίζας

Εστω ότι $\sum u_k$ είναι σειρά με θετικού όρους και έστω ότι

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k} = \lim_{k\to\infty} u_k^{\frac{1}{k}}$$

(i) Αν $\rho < 1$, τότε η σειρά συγκλίνει.

(ii) Αν $\rho > 1$, τότε η σειρά αποκλίνει.

(iii) Αν $\rho = 1$, τότε δεν υπάρχει συμπέρασμα.

Σημείωση: Οταν ισχύει η τρίτη περίπτωση στα κριτήρια του λόγου και της ρίζας, τότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα άλλο κριτήριο. Συνήθως χρησιμοποιείται το κριτήριο σύγκρισης.

Παράδειγμα: Να εξεταστεί αν οι πιο κάτω σειρές συγκλίνουν

$$\text{(i)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \varkappa^{\varkappa}, \quad \text{(ii)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2} \ \text{(iii)}$$

12.3 Εναλλάσσουσα σειρά - Σχετική σύγκλιση

Η σειρά που έχει την μορφή

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

ή

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots$$

όπου a_k's είναι θετικοί αριθμοί, καλείται **εναλλάσσουσα σειρά**.

Κριτήριο εναλλάσσουσας σειράς: Μια εναλλάσσουσα σειρά συγκλίνει αν ισχύουν οι συνθήκες:

(i) $a_1 > a_2 > \ldots > a_k > \ldots$

(ii) $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

Παράδειγμα: Η σειρά

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{k+1}\frac{1}{k} + \ldots$$

καλείται **εναλλάσσουσα αρμονική σειρά**. Επειδή $a_k = \frac{1}{k}$ και $a_{k+1} = \frac{1}{k+1}$ έχουμε $a_k > a_{k+1}$. Επίσης $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k} = 0$. Αρα η σειρά συγκλίνει.

Παράδειγμα: Να εξεταστεί αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\mathrm{e}^{-k}$ συγκλίνει.

Απόλυτη σύγκλιση

Λέμε ότι μια σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ **συγκλίνει απόλυτα** αν η σειρά με απόλυτες τιμές $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ συγκλίνει.

Θεώρημα: Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ συγκλίνει. Δηλαδή, αν μια σειρά συγκλίνει απόλυτα, τότε συγκλίνει.

Κριτήριο του λόγου για απόλυτη σύγκλιση: Εστω ότι $\sum u_k$ είναι μια σειρά με όρους διαφορετικούς του μηδέν και ότι

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|}.$$

(i) Αν $\rho < 1$, τότε η σειρά $\sum u_k$ συγκλίνει απόλυτα και επομένως συγκλίνει.
(ii) Αν $\rho > 1$, τότε η σειρά $\sum u_k$ αποκλίνει.
(iii) Αν $\rho = 1$, τότε δεν υπάρχει συμπέρασμα.

Παράδειγμα: Να εξεταστεί αν οι πιο κάτω σειρές συγκλίνουν απόλυτα:

$$\text{(i)}\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k}{5^k}, \quad \text{(ii)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{4/3}}, \quad \text{(iii)}\ \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k \log k}{k}$$

Στο τελευταίο παράδειγμα παρατηρούμε ότι η σειρά συγκλίνει με το κριτήριο εναλλάσσουσας σειράς επειδή $u_k = \frac{\log k}{k} > \frac{\log(k+1)}{k+1} = u_{k+1}$ και $\lim_{k\to\infty} u_k = \lim_{k\to+\infty} \frac{\log k}{k} = 0$. Τέτοιες σειρές, οι οποίες συγκλίνουν αλλά δεν συγκλίνουν απόλυτα, λέμε ότι **συγκλίνουν σχετικά**.

Κριτήρια Σύγκλισης

Ονομα	Πρόταση	Παρατήρηση