11 ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

11.1 Εισαγωγή

Ορισμός: **Ακολουθία πραγματικών αριθμών** μπορεί να θεωρηθεί ως πραγματική συνάρτηση a με πεδίο ορισμού τους θετικούς ακέραιους: $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Οι τιμές της συνάρτησης $a(1),\ a(2), \ldots,\ a(n), \ldots$ καλούνται **όροι** της ακολουθίας και συμβολίζονται συνήθως με

$$a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n, \ldots$$

όπου a_n καλείται ο **γενικός όρος** της ακολουθίας. Παρατηρούμε ότι μια ακολουθία έχει άπειρους όρους.
Θα συμβολίζουμε μια ακολουθία με $\{a_n\}$ ή (a_n).
Μια ακολουθία, όπως και κάθε συνάρτηση, ορίζεται με κάποιον τύπο που μας δίνει το γενικό όρο. Για παράδειγμα, ο γενικός όρος

$$a_n = \frac{n}{n+2}$$

ορίζει την ακολουθία αριθμών

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{6}, \ldots$$

Ενας άλλος τρόπος ορισμού της ακολουθίας είναι ο επαγωγικός. Για παράδειγμα, οι συνθήκες

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -1, \quad a_{n+1} = a_n - a_{n-1},\ n \geq 1$$

ορίζουν την ακολουθία

$$a_0 = 1,\ a_1 = -1,\ a_2 = a_1 - a_0 = -2,\ a_3 = a_2 - a_1 = -1,\ a_4 = a_3 - a_2 = 1,\ a_5 = 2,\ a_6 = 1, \ldots$$

Δηλαδή έχουμε την ακολουθία

$$1,\ -1,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 1, \ldots$$

Ο πιο πάνω τύπος καλείται **αναδρομικός**.

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι πρώτοι πέντε όροι των πιο κάτω ακολουθιών:
(i) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$
(ii) $a_n = \dfrac{n}{2^n}$
(iii) $a_1 = \sqrt{6}, \quad a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n},\ n \geq 1$

Η γραφική παράσταση μιας ακολουθίας μπορεί να γίνει στο επίπεδο όπως και για μια συνάρτηση.

Παράδειγμα: Να γίνει η γραφική παράσταση της $a_n = n^2$.

Επειδή το πεδίο ορισμού είναι μόνο οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί, το διάγραμμα αποτελείται από συνεχιζόμενα μεμονομένα σημεία. Παρατηρούμε ότι αν ενώσουμε αυτά τα σημεία θα έχουμε την γραφική παράσταση της καμπύλης $y = x^2$ $(x \geq 1)$.

Οριο ακολουθίας

Ορισμός: Λέμε ότι η ακολουθία (a_n) έχει όριο τον αριθμό L αν για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ένα θετικό ακέραιο N έτσι ώστε να έχουμε

$$|a_n - L| < \epsilon \quad \text{όταν} \quad n \geq N$$

Δηλαδή, από τη γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι μια ακολουθία τείνει στο L αν μετά από το σημείο $n = N$, όλοι οι όροι της ακολουθίας περικλείονται μεταξύ των ευθειών $y = L - \epsilon$ και $y = L + \epsilon$.

Αν η ακολουθία (a_n) έχει όριο L, τότε θα λέμε ότι **συγκλίνει** στο L και θα γράφουμε

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L \quad (\text{ή} \;\; a_n \to L)$$

Διαφορετικά θα λέμε ότι η ακολουθία **αποκλίνει στο άπειρο** (ή απλά δεν συγκλίνει) και θα γράφουμε

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \infty \quad (\text{ή} \;\; a_n \to \infty)$$

Παράδειγμα:

Από τα διαγράμματα παρατηρούμε ότι

$$a_n = n + 2 \to +\infty \quad \text{και} \quad a_n = \frac{n}{n+2} \to 1.$$

Θεώρημα: Εστω ότι οι ακολουθίες a_n και b_n συγκλίνουν στα όρια L_1 και L_2, αντίστοιχα, και c είναι μια σταθερά. Τότε

(i) $\lim\limits_{n \to +\infty} c a_n = c L_1$

(ii) $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n \pm b_n) = L_1 \pm L_2$

(iii) $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n b_n) = L_1 L_2$

(iv) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{L_1}{L_2}$ αν $L_2 \neq 0$.

Παράδειγμα: Να εξεταστεί αν οι πιο κάτω ακολουθίες συγκλίνουν:

$$\text{(i) } a_n = \frac{\log n}{n}, \quad \text{(ii) } a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2n^2}, \quad \text{(iii) } a_n = \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n$$

Παράδειγμα: Εστω η ακολουθία

$$a_1 = \sqrt{6} \quad \text{και} \quad a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n},\ n \geq 1$$

Αν υποθέσουμε ότι η ακολουθία συγκλίνει να βρεθεί το όριό της.

11.2 Μονότονες ακολουθίες

Ορισμός: Η ακολουθία (a_n) καλείται

αύξουσα αν $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots$

φθίνουσα αν $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$

Ακολουθίες που είναι αύξουσες ή φθίνουσες καλούνται **μονότονες**.

Αναλυτικότερα μια ακολουθία είναι αύξουσα αν

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \text{ή} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

και είναι φθίνουσα αν

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \text{ή} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1.$$

Επίσης αν $a_n = f(n)$ είναι ο νιοστός όρος μιας ακολουθίας και αν $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση για $x \geq 1$, τότε έχουμε τα πιο κάτω αποτελέσματα

$$f'(x) \geq 0 \ \forall x \geq 1 \Rightarrow \text{ αύξουσα}$$
$$f'(x) \leq 0 \ \forall x \geq 1 \Rightarrow \text{ φθίνουσα}$$

Παράδειγμα: Να εξεταστεί αν οι πιο κάτω ακολουθίες είναι μονότονες:

$$\text{(i) } a_n = \frac{n}{2n+1} \quad \text{(ii) } a_n = \frac{n!}{3^n} \quad \text{(iii) } a_n = \frac{\log(n+2)}{n+2}$$

Οι μονότονες ακολουθίες ή είναι φραγμένες οπότε συγκλίνουν ή δεν είναι φραγμένες οπότε αποκλίνουν στο άπειρο. Ειδικώτερα

Αν μια αύξουσα ακολουθία είναι **άνω φραγμένη**, δηλαδή $a_n \leq M \ \forall n$, τότε συγκλίνει, διαφορετικά δεν συγκλίνει. Ο αριθμός M καλείται **ελάχιστο άνω φράγμα** της ακολουθίας, ενώ οποιοσδήποτε αριθμός μεγαλύτερος από το M καλείται **άνω φράγμα**.

Ανάλογα, ορίζεται και η **κάτω φραγμένη** ακολουθία και το **μέγιστο κάτω φράγμα** της ακολουθίας.

Παράδειγμα: Να δειχτεί ότι οι πιο κάτω ακολουθίες είναι μονότονες και στη συνέχεια να εξεταστεί αν συγκλίνουν.

(i) $a_n = \dfrac{2^n}{(n+1)!}$

(ii) $a_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$

Παράδειγμα: Να εξεταστεί αν η $a_n = \dfrac{100^n}{n!}$ είναι μονότονη ακολουθία και στη συνέχεια να εξεταστεί αν συγκλίνει.