10 ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ - ΚΑΝΟΝΑΣ L' HOPITAL

10.1 Γενικευμένα ολοκληρώματα

Το ορισμένο ολοκλήρωμα ορίστηκε για συναρτήσεις συνεχείς στο διάστημα $[a, b]$ και φραγμένες στο $[a, b]$. Τώρα, θα επεκτείνουμε την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος έτσι ώστε να καλύπτει και τις εξής δύο περιπτώσεις:

(i) ολοκλήρωση συνεχής συνάρτησης στο διάστημα $[a, +\infty)$ (ή $(-\infty, b]$)

(ii) ολοκλήρωση συνάρτησης που δεν είναι φραγμένη στο διάστημα $[a, b]$.

Τα ολοκληρώματα αυτής της μορφής καλούνται **γενικευμένα**.

Σημείωση: Και οι δύο περιπτώσεις μπορούν να εμφανιστούν στο ίδιο ολοκλήρωμα. Δηλαδή, μπορεί να έχουμε να ολοκληρώσουμε σύναρτηση στο $[a, +\infty)$, η οποία δεν είναι φραγμένη στο διάστημα αυτό.

Ορισμός: Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, +\infty)$, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ ορίζεται ως

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{l \to +\infty} \int_a^l f(x)\mathrm{d}x.$$

Αν το όριο υπάρχει, τότε θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα **συγκλίνει**. Διαφορετικά θα λέμε ότι αποκλίνει ή δεν συγκλίνει.

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty, b]$, τότε ορίζουμε

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{l \to -\infty} \int_l^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Με βάση τους πιο πάνω ορισμούς έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{l \to -\infty} \int_l^0 f(x)\mathrm{d}x + \lim_{l \to +\infty} \int_0^l f(x)\mathrm{d}x.$$

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty}$ συγκλίνει αν και τα δύο $\int_{-\infty}^0 f(x)\mathrm{d}x$ και $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ συκλίνουν.

Παράδειγμα: Να υπολογιστούν τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int_4^{+\infty} \frac{2}{x^2-1}\mathrm{d}x, \quad \text{(ii)} \int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{e}^x}{3-2\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x, \quad \text{(iii)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}x.$$

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b)$, αλλά $f(x) \to +\infty$ ή $f(x) \to -\infty$ όταν x τείνει στο b από τα αριστερά, τότε ορίζουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα ως εξής:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{l \to b^-} \int_a^l f(x)\mathrm{d}x.$$

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $(a, b]$, αλλά $f(x) \to +\infty$ ή $f(x) \to -\infty$ όταν x τείνει στο a από τα δεξιά, τότε ορίζουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα ως εξής:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{l \to a^+} \int_l^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Εστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ με την εξαίρεση στο σημείο $c \in (a, b)$. Τότε η f τείνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ όταν το x τείνει στο c από τα αριστερά ή από τα δεξιά. Αν και τα δύο γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ και $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ συγκλίνουν, τότε και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ συγκλίνει και

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Παράδειγμα: Να υπολογιστούν τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int_0^9 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x}}, \quad \text{(ii)} \int_{-3}^1 \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}}, \quad \text{(iii)} \int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{x-2}$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = \frac{8}{x^2-4}$ και τον άξονα των x για $x \geq 3$.

Παράδειγμα: Δίνεται ότι το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\tan x) \mathrm{d}x$ συγκλίνει. Να δειχτεί ότι $I = 0$.

10.2 Κανόνες L' Hopital

Θεώρημα (Κανόνας L' Hopital της παράστασης $0/0$): Εστω ότι $\lim f(x) = 0$ και $\lim g(x) = 0$. Αν $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (πραγματικός αριθμός) ή $+\infty$ ή $-\infty$, τότε

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

όπου $\lim$ αντιπροσωπεύει ένα από τα όρια $\lim\limits_{x\to a}$, $\lim\limits_{x\to a^+}$, $\lim\limits_{x\to a^-}$, $\lim\limits_{x\to +\infty}$ ή $\lim\limits_{x\to -\infty}$

Σημείωση: $\lim \frac{f(x)}{g(x)} \neq \lim \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'$

Παράδειγμα: Να υπολογιστούν τα όρια:

$$\text{(i)} \ \lim_{x\to 0} \frac{x\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}, \quad \text{(ii)} \ \lim_{x\to c} \frac{x^{1/3}-c^{1/3}}{x-c}, \quad \text{(iii)} \ \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x^2}$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{\dfrac{\log x}{x^4-1}}$.

Παράδειγμα: Να βρεθεί το όριο $\lim_{x\to\infty} x \log\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

Θεώρημα (Κανόνας L' Hopital της παράστασης ∞/∞): Εστω ότι $\lim f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ και $\lim g(x) = +\infty$ ή $-\infty$. Αν $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (πραγματικός αριθμός) ή $+\infty$ ή $-\infty$, τότε

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

όπου lim αντιπροσωπεύει ένα από τα όρια $\lim\limits_{x\to a}$, $\lim\limits_{x\to a^+}$, $\lim\limits_{x\to a^-}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}$ ή $\lim\limits_{x\to-\infty}$.

Αλλες απροσδιόριστες παραστάσεις $(0\cdot\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty,\ \infty-\infty)$

Παράδειγμα: Να υπολογιστούν τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\log x}{x+\log x}$, (ii) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$, (iii) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}$, (iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}}$

Παράδειγμα: Να υπολογιστούν τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^2} \mathrm{d}x, \qquad \text{(ii)} \int_0^{\infty} x \mathrm{e}^{-3x} \mathrm{d}x$$