1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Πραγματικοί αριθμοί (Εισαγωγή)

Οι πιο απλοί αριθμοί είναι οι "αριθμοί μέτρησης",

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots$$

οι οποίοι ονομάζονται φυσικοί αριθμοί (Natural numbers). Το σύνολο των φυσικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{N}$. Οι φυσικοί αριθμοί είναι υποσύνολο των **ακέραιων αριθμών** (Integers)

$$\ldots,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ldots$$

Το σύνολο των ακέραιων αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{Z}$ (από την γερμανική λέξη Zahl, αριθμός). Επίσης οι ακέραιοι αριθμοί είναι υποσύνολο των **ρητών αριθμών** (rational numbers)

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ -\frac{2}{5},\ \frac{8}{1},\ldots$$

με την εξαίρεση όταν ο παρονομαστής είναι ίσος με το μηδέν. Δηλαδή, ρητός αριθμός είναι ο αριθμός εκείνος που γράφεται ως αναλογία δύο ακεραίων. Το σύνολο των ρητών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{Q}$(από τη λέξη quotients, πηλίκα). Αριθμοί όπως,

$$\sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \pi,\ \mathrm{e},\ 1+\sqrt{7},\ldots$$

που δεν είναι δυνατό να γραφούν ως αναλογία δύο ακέραιων καλούνται **άρρητοι αριθμοί** (irrational numbers). Οι ρητοί και άρρητοι αριθμοί αποτελούν το σύνολο των πραγματικών αριθμών (real numbers) το οποίο συμβολίζεται με $\mathbb{R}$.

Ο αριθμός $a+\mathrm{i}b$, όπου a και b πραγματικοί αριθμοί και $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$, καλείται **μιγαδικός αριθμός**. Ο αριθμός a καλείται το **πραγματικό μέρος** και ο b το **φανταστικό μέρος** του μιγαδικού αριθμού. Οι μιγαδικοί αριθμοί θα εξεταστούν σε ξεχωριστό κεφάλαιο. Γνωρίζουμε όμως ότι εμφανίζονται στις λύσεις της εξίσωσης $x^2+bx+c=0$.

Οι ρητοί αριθμοί γράφονται ως παράσταση δεκαδικού αριθμού όπου μετά από κάποιο δεκαδικό ψηφίο έχουμε συνεχή επανάληψη ενός σταθερού αριθμού ψηφίων. Για παράδειγμα,

$$\frac{8}{3}=2.666666\ldots,$$

δηλαδή, έχουμε επανάληψη του ψηφίου 6,

$$\frac{8}{7}=1.142857142857142857\ldots,$$

δηλαδή, έχουμε συνεχή επανάληψη των ψηφίων 142857. Την επανάληψη αυτή τη συμβολίζουμε με

$$\frac{8}{3} = 2.\bar{6} \quad ή \quad \frac{8}{3} = 2.\dot{6}$$
$$\frac{8}{7} = 1.\overline{142857} \quad ή \quad \frac{8}{7} = 1.\dot{1}4285\dot{7}$$
$$\frac{20943}{550} = 38.07\overline{81} \quad ή \quad \frac{20943}{550} = 38.07\dot{8}\dot{1}$$

Οι άρρητοι αριθμοί αν και γράφονται ως παράσταση δεκαδικού, δεν έχουν την πιο πάνω ιδιότητα. Για παράδειγμα,

$$\pi = 3.14159265358979$$
$$\sqrt{2} = 1.414213562$$

Παρατηρούμε ότι δεν έχουμε επανάληψη ψηφίων.

Παράδειγμα: Να βρεθεί ο δεκαδικός αριθμός που έχει δεκαδική παράσταση (i) $0.\dot{4}\dot{5}$, (ii) $3.\dot{1}4\dot{2}$.

Σημείωση: Οι φυσικοί αριθμοί της μορφής $2k$ καλούνται **άρτιοι** και αυτοί της μορφής $2k+1$ καλούνται **περιττοί**, όπου k είναι φυσικός αριθμός. Παρατηρούμε ότι οι άρτιοι αρθμοί έχουν άρτια τετράγωνα και οι περιττοί αριθμοί έχουν περιττά τετράγωνα:

$$(2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$
$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Επίσης ισχύει το αντίστροφο.

1.2 Διαστήματα - Ανισώσεις

Διαστήματα: Αν $a,\ b \in \mathbb{R}$ και $a < b$, τότε καλούμε

(i) **Ανοικτό διάστημα** από a ως b και το συμβολίζουμε με(a, b), είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών μεταξύ των a και b, χωρίς τα άκρα.

(ii) **Κλειστό διάστημα** το οποίο συμβολίζουμε με $[a, b]$, είναι το ανοικτό διάστημα (a, b) μαζί με τα άκρα a και b.

Δηλαδή,

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} :\ a < x < b\}$$
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} :\ a \leq x \leq b\}$$

Με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} :\ a < x \leq b\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} :\ -\infty < x \leq a\}$$

$$(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}:\ a<x<+\infty\}$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}:\ -\infty<x<+\infty\}$$

κ.λ.π.

Ενωση και τομή διαστημάτων
Παράδειγμα 1: Να βρεθούν:

Παράδειγμα 2: Να βρεθούν

Ανισώσεις

Ορισμός: $a \leq b$ σημαίνει $a = b$ ή $a < b$.

Θεώρημα: Εστω a, b, c και $d \in \mathbb{R}$.

(i) Αν $a < b$ και $b < c$ τότε $a < c$.

(ii) Αν $a < b$ τότε $a \pm c < b \pm c$

(iii) Αν $a < b$ και $c > 0$ τότε $ac < bc$
Αν $a < b$ και $c < 0$ τότε $ac > bc$.

(iv) Αν $a < b$ και $c < d$ τότε $a + c < b + d$

(v) Αν $a < b$, $a, b > 0$ ή $a, b < 0$ τότε $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Εφαρμογές: **Παράδειγμα 1**: Να λυθούν οι ανισώσεις

(i) $\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3}, \quad x \neq -2$

(ii) $x^2 + 7x + 12 \geq 0$

(iii) $\frac{2}{x} < \frac{3}{x-4}$

1.3 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Αν a είναι ένας πραγματικός αριθμός, δηλαδή, $a \in \mathbb{R}$, ορίζουμε

$$|a| = \begin{cases} a & \alpha\nu \quad a \geq 0 \\ -a & \alpha\nu \quad a < 0 \end{cases}$$

όπου $|a|$ καλείται **απόλυτη τιμή** του πραγματικού αριθμού a. (Απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού μπορεί να οριστεί και ο αριθμός χωρίς το πρόσημο του.) Για παράδειγμα, $|5| = 5$, $|0| = 0$, $|-7| = 7$.

Ιδιότητες:

(i) $|a| \geq 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(ii) $\sqrt{a^2} = |a|, \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(iii) $|-a| = |a|, \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(iv) $|ab| = |a||b|, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

(v) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

(vi) $-|a| \leq a \leq |a|, \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(vii) $|a + b| \leq |a| + |b|, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ (Τριγωνική ανισότητα).

Εξισώσεις με απόλυτες τιμές του αγνώστου

Παράδειγμα: Να λυθούν οι εξισώσεις

(i) $7|x| + 4 = 5|x| + 8$

(ii) $x^2 - 4|x| - 5 = 0$

(iii) $|x^2 - 3x + 2| = 2$

(iv) $|x - 5| + |x - 2| = 3x + 4$

Ανισώσεις με απόλυτες τιμές του αγνώστου

Παράδειγμα: Να λυθούν οι ανισώσεις:

(i) $2|x| - 8 < |x| - 4$

(ii) $|x-3| + 2|x-1| < 2x + 8$

(iii) $|x-4|^2 + |x-4| - 12 \geq 0$

1.4 Γραφικές Παραστάσεις

Καρτεσιανές συντεταγμένες στο επίπεδο

Εστω ότι $x'x$ και $y'y$ είναι δύο κάθετα τεμνόμενοι άξονες με κοινή αρχή το σημείο Ο. Το σημείο Ο καλείται **αρχή των αξόνων** και οι άξονες $x'x$ και $y'y$, οι οποίοι αποτελουν ένα ορθογώνιο σύστημα, καλούνται οι άξονες των **τετμημένων** και **τεταγμένων**, αντίστοιχα. Σε κάθε σημείο του επιπέδου στο οποίο έχουμε χαρακτηρίσει ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων αντιστοιχεί ένα μοναδικό ζεύγος αριθμών τους οποίους καλούμε **καρτεσιανές συντεταγμένες**.

Για το σημείο Α, στο σχήμα 1, οι συντεταγμένες είναι x_1 και y_1. Η συντεταγμένη x_1, που καλείται **τετμημένη** του Α, είναι η απόσταση του Α από τον άξονα $y'y$ και η συντεταγμένη y_1, η οποία καλείται **τεταγμένη** του Α, είναι η απόσταση του Α από τον άξονα $x'x$.

Τα πρόσημα των συντεταγμένων δίνονται από το σχήμα 2. Τα σημεία που βρίσκονται πάνω στον άξονα $y'y$ έχουν τετμημένη ίση με το μηδέν, ενώ τα σημεία που βρίσκονται πάνω στον άξονα $x'x$ έχουν τεταγμένη ίση με το μηδέν.

Πολικές συντεταγμένες

Οι καρτεσιανές συντεταγμένες δεν είναι ο μοναδικός τρόπος με τον οποίον μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση ενός σημείου στο επίπεδο. Σε αρκετές περιπτώσεις είναι πιο βολικό να εισάγουμε τις **πολικές συντεταγμένες**, οι οποίες απεικονίζονται στο σχήμα 3. Στο σημείο A αντιστοιχούμε τις πολικές συντεταγμένες (r, θ), όπου r είναι η απόσταση του A από την αρχή O και θ είναι η γωνία που σχηματίζεται από τον άξονα $x'x$ και της ευθείας OA. Από το σχήμα 3 μπορούμε να προσδιορίσουμε τις σχέσεις που συνδέουν τις καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες,

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

Αντίστροφα,

$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

Απόσταση μεταξύ δύο σημείων

Εστω η ευθεία ϵ και τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ πάνω στην ευθεία, όπως φαίνονται στο σχήμα 4. Επίσης έστω το σημείο $C(x_2, y_2)$. Τώρα, από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Αρα η απόσταση, d, από το A στο B δίνεται από τη σχέση

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Γραφικές παραστάσεις

Ορισμός Η **γραφική παράσταση** μιας εξίσωσης δύο μεταβλητών x, y περιέχει όλα τα σημεία των οποίων οι συντεταγμένες (x, y) είναι λύση της εξίσωσης.

Συμμετρία

(i) Μια καμπύλη είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των y αν αλλαγή του x με $-x$ στην εξίσωση της προκύπτει η ίδια η εξίσωση. Δηλαδή, η εξίσωση διατηρεί τη μορφή της. Για παράδειγμα, η εξίσωση $y = x^2$ έχει γραφική παράσταση που είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των y, επειδή αν θέσουμε $x = -x$ στην εξίσωση, βρίσκουμε $y = (-x)^2 \Rightarrow y = x^2$. (Σχήμα 5α)

(ii) Μια καμπύλη είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των x αν αλλαγή του y με $-y$ στην εξίσωση της προκύπτει η ίδια η εξίσωση. Για παράδειγμα η εξίσωση $y^2 = 4x$ έχει γραφική παράσταση που είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των x, επειδή αν θέσουμε $y = -y$ στην εξίσωση $y^2 = 4x$ βρίσκουμε $(-y)^2 = 4x \Rightarrow y^2 = 4x$. (Σχήμα 5β)

(iii) Μια καμπύλη είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων αν αλλαγή του x με $-x$ και αλλαγή του y με $-y$ στην εξίσωση της προκύπτει η ίδια η εξίσωση. Για παράδειγμα, η γραφική παράσταση της $y = x^3$ είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων, επειδή αν θέσουμε $x = -x$ και $y = -y$ βρίσκουμε $-y = (-x)^3 \Rightarrow y = x^3$. (Σχήμα 5γ)

1.5 Συντελεστής διεύθυνσης (κλίσης) ευθείας

Ορισμός: Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι δύο σημεία της ευθείας ϵ (σχήμα 4), τότε η **κλίση** της ευθείας, λ, δίνεται από τη σχέση

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Παρατηρήσεις:

(i) $\lambda = \tan\theta$

(ii) $\lambda = 0$ όταν ϵ παράλληλη με τον άξονα $x'x$

(iii) λ δεν ορίζεται όταν ϵ παράλληλη με τον άξονα $y'y$

(iv) $\lambda > 0$ $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$, τότε

(v) $\lambda < 0$ $(-\frac{\pi}{2} < \theta < 0)$, τότε

Οι παρατηρήσεις (ii)-(v) προκύπτουν από την παρατήρηση (i).

Εστω λ_1 η κλίση της ευθείας ϵ_1 και λ_2 η κλίση της ευθείας ϵ_2. Δύο παράλληλες ευθείες έχουν τις κλίσεις τους ίσες. Δύο κάθετες ευθείες έχουν το γινόμενο των κλίσεων τους ίσο με -1. Δηλαδή,

$$\epsilon_1 \| \epsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

$$\epsilon_1 \perp \epsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

Γωνία μεταξύ δύο ευθειών

Η γωνία ϕ μεταξύ δύο μη καθέτων ευθειών δίνεται από τη σχέση

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1 \lambda_2}.$$

1.6 Εξίσωση ευθείας

Απλές περιπτώσεις: Η κατακόρυφη ευθεία (παράλληλη με τον άξονα $y'y$) που διέρχεται από το σημείο $(a, 0)$ έχει εξίσωση

$$x = a$$

και η οριζόντια ευθεία (παράλληλη με τον άξονα $x'x$) που διέρχεται από το σημείο $(0, b)$ έχει εξίσωση

$$y = b$$

Γενικές μορφές: Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο (x_1, y_1) και έχει κλίση ίση με λ έχει εξίσωση

$$y - y_1 = \lambda(x - x_1).$$

Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) έχει εξίσωση

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Παρατηρούμε ότι η γενική μορφή εξίσωσης μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$Ax + By + C = 0,$$

όπου τουλάχιστον ένας από τους συντελεστές A και B δεν είναι μηδέν. Αν $B \neq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται

$$y = \lambda x + \gamma,$$

όπου $\lambda(= -\frac{A}{B})$ είναι η κλίση της ευθείας και $\gamma(= -\frac{C}{B})$ είναι η τεταγμένη του σημείου όπου η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$.

Απόσταση σημείου από ευθεία

Εστω το σημείο (x_1, y_1) και η ευθεία ϵ με εξίσωση $Ax+By+C = 0$. Η απόσταση του σημείου αυτού από την ευθεία ϵ δίνεται από τη σχέση

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Μέσον ευθύγραμμου τμήματος

Το σημείο M έχει συντεταγμένες

$$\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right)$$

Τομή δύο ευθειών

Αν ϵ_1 και ϵ_2 είναι δύο ευθείες στο επίπεδο με εξισώσεις $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ και $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, αντίστοιχα, τότε ισχύει ένα από τα παρακάτω:

(i) Οι ευθείες συμπίπτουν και $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

(ii) Οι ευθείες είναι παράλληλες και $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$. Δηλαδή, έχουν τις κλίσεις τους ίσες.

(iii) Οι ευθείες τέμνονται. Οι συντεταγμένες του σημείου τομής είναι η λύση το συστήματος

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Παράδειγμα:

1.7 Ο κύκλος

Ενα σημείο $A(x, y)$ είναι σημείο του κύκλου, αν και μόνο αν

$$|KA| = \rho.$$

Αρα

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \rho$$

και επομένως

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

Αυτή είναι η εξίσωση του κύκλου με κέντρο (x_0, y_0) και ακτίνα ρ. Η γενική μορφή εξίσωσης κύκλου είναι

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0,$$

όπου $A^2 + B^2 - 4C \geq 0$.

Παρατηρήσεις:

1. Αν $A^2 + B^2 - 4C = 0$, τότε η ακτίνα του κύκλου είναι ίση με το μηδέν. Δηλαδή, η πιο πάνω εξίσωση αντιπροσωπεύει ένα σημείο.

2. Αν $A^2 + B^2 - 4C < 0$, τότε δεν υπάρχουν σημεία τέτοια ώστε οι συνεταγμένες τους να επαληθεύουν την εξίσωση. Με άλλα λόγια, η εξίσωση δεν έχει γραφική παράσταση.

Παράδειγμα: Να εξεταστεί αν οι παρακάτω εξισώσεις αντιπροσωπεύουν κύκλο, σημείο ή δεν έχουν γραφική παράσταση.

(i) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$

(ii) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$

(iii) $x^2 + y^2 + 10y + 26 = 0$

1.8 Η παραβολή

Η εξίσωση της παραβολής είναι

$$y = ax^2$$

Η γενική μορφή της εξίσωσης της παραβολής είναι

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

Το σημείο (x_0, y_0) καλείται η **κορυφή** της παραβολής. Τώρα, η γενική μορφή της εξίσωσης της παραβολής γράφεται και στη μορφή

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

όπου $(-\frac{B}{2A}, C - \frac{B^2}{4A})$ είναι η κορυφή της παραβολής.
Παράδειγμα: Να βρεθεί η κορυφή της παραβολής $y = 3x^2 - 2x + 1$.