Παράδειγμα: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\text{(i)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\cos x}\mathrm{d}x \qquad \text{(ii)} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x - x - 1}{x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x}\mathrm{d}x \qquad \text{(iii)} \int_0^1 \frac{1+\mathrm{e}^{-x}}{1+x\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$$

Λύση: (i) Έχουμε

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\cos x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos x - 1}{1+\cos x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{1+\cos x}\right)\mathrm{d}x$$

Χρησιμοποιούμε την τριγωνομετρική ταυτότητα $2\cos^2 A = 1 + \cos 2A$, για να βρούμε

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\cos x}\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left(x - \tan\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.\end{aligned}$$

(ii) Έχουμε

$$\frac{\mathrm{e}^x - x - 1}{x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x} = \frac{\mathrm{e}^x - x - 1}{\mathrm{e}^x(x+1)} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x(x+1)} - \frac{x+1}{\mathrm{e}^x(x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{\mathrm{e}^x}.$$

Άρα

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x - x - 1}{x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x = \left(\ln|x+1| + \mathrm{e}^{-x}\right)\Big|_0^1 = \ln 2 + \mathrm{e}^{-1} - 1.$$

(ii) Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με e^x, για να βρούμε

$$\int_0^1 \frac{1+\mathrm{e}^{-x}}{1+x\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1+\mathrm{e}^x}{x+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(x+\mathrm{e}^x)'}{x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x = \ln|x+\mathrm{e}^x|\Big|_0^1 = \ln(1+\mathrm{e}).$$ ◀

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\text{(i)} \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \quad \text{(ii)} \int x\tan^{-1} x\mathrm{d}x \quad \text{(iii)} \int \mathrm{e}^{-3x}\sin 3x\mathrm{d}x \quad \text{(iv)} \int \cos(\ln x)\mathrm{d}x$$

$$\text{(v)} \int \sin^{-1} x\mathrm{d}x \quad \text{(vi)} \int \frac{x\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x \quad \text{(vii)} \int \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x \quad \text{(viii)} \int \frac{x\mathrm{d}x}{x^2+6x+13}$$

2. Αν η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,1]$, να δειχθεί ότι

$$\int_{-1}^1 xf''(x)\mathrm{d}x = f'(1) + f'(-1) + f(-1) - f(1).$$

3. Αν $m,\ n$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί και $m \neq n$, να δειχθεί ότι

$$\text{(i)} \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(nx)\mathrm{d}x = 0 \quad \text{(ii)} \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\mathrm{d}x = 0$$

$$\text{(iii)} \int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\mathrm{d}x = 0$$

4. Δίνεται ότι $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x$. Να δειχθεί ότι

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

5. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\text{(i)} \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \mathrm{d}x \quad \text{(ii)} \int \sqrt{\cos x} \sin x \mathrm{d}x \quad \text{(iii)} \int \tan^3 x \sec^5 x \mathrm{d}x \quad \text{(iv)} \int \operatorname{cosec}^4 x \mathrm{d}x$$

6. Γράφοντας το άθροισμα $\sin x + \cos x$ στη μορφή $A \sin(x + \phi)$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + \cos x}.$$

Με τον ίδιο τρόπο να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a \sin x + b \cos x},$$

όπου οι σταθερές a και b δεν μπορούν να είναι και οι δύο ίσες με μηδέν.

7. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\text{(i)} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+25}} \quad \text{(ii)} \int \frac{\cos x \mathrm{d}x}{\sqrt{2-\sin^2 x}} \quad \text{(iii)} \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{\sqrt{2x^2-4}}{x} \mathrm{d}x \quad \text{(iv)} \int_0^3 \frac{x^3 \mathrm{d}x}{(3+x^2)^{5/2}}$$

8. Το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x}{x^2+4} \mathrm{d}x$$

μπορεί να υπολογιστεί είτε με τριγωνομετρική αντικατάσταση, είτε με την αντικατάσταση $u = x^2 + 4$. Να υπολογιστεί με τους δύο αυτούς τρόπους και να δειχθεί ότι τα αποτελέσματα είναι ισοδύναμα.

9. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\text{(i)} \int \frac{\mathrm{d}x}{16x^2+16x+5} \quad \text{(ii)} \int \frac{\mathrm{e}^x \mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}}} \quad \text{(iii)} \int \frac{\cos x \mathrm{d}x}{\sin^2 x - 6\sin x + 2}$$

$$\text{(iv)} \int \frac{2x+3}{4x^2+4x+5} \mathrm{d}x \quad \text{(v)} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+x} \quad \text{(vi)} \int \frac{x^4+6x^3+10x^2+x}{x^2+6x+10} \mathrm{d}x$$

$$\text{(vii)} \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x} \quad \text{(viii)} \int \frac{\sec^2 x \mathrm{d}x}{\tan^3 x - \tan^2 x}$$

10. Να βρεθούν οι σταθερές a και b τέτοιες ώστε

$$x^4 + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1).$$

Στη συνέχεια να δειχθεί ότι

$$\int_0^1 \frac{x}{x^4+1} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}.$$

11. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\text{(i)} \int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\mathrm{d}x \quad \text{(ii)} \int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \quad \text{(iii)} \int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x} \quad \text{(iv)} \int \frac{\cos x}{2-\cos x}\mathrm{d}x$$

12. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = \frac{1}{u}$, να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\text{(i)} \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x \quad \text{(ii)} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{3-x^2}} \quad \text{(iii)} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+1}} \quad \text{(iv)} \int \frac{\sqrt{x^2-5}}{x^4}\mathrm{d}x$$

13. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\text{(i)} \int \frac{1+x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \quad \text{(ii)} \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x \quad \text{(iii)} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^{1/2}+x^{1/4}} \quad \text{(iv)} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x - \tan x}$$

14. Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = \pi - u$, να δειχθεί ότι

$$\int_0^\pi x f(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

15. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της άσκησης 8.14, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{2-\sin^2 x}\mathrm{d}x.$$

16. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\text{(i)} \int \frac{\sqrt{x+1}}{(x-1)^{5/2}}\mathrm{d}x \quad \text{(ii)} \int \sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}\mathrm{d}x \quad \text{(iii)} \int \frac{\mathrm{d}x}{(4-x)\sqrt{x-1}}$$

17. Να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(a-x)\mathrm{d}x.$$

Στη συνέχεια να αποδειχθούν οι πιο κάτω σχέσεις

$$\text{(i)} \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4} \qquad \text{(ii)} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2})$$

18. Να υπολογιστούν τα πιο κάτω ορισμένα ολοκληρώματα

$$\text{(i)} \int_1^2 (x-1)^2 \ln x\mathrm{d}x \qquad \text{(ii)} \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{(\sin x+\cos x)^2}$$

19. Δίνεται ότι

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{ax}\cos^n x\mathrm{d}x.$$

Να δειχθεί ότι, για $n > 1$,

$$I_n = \frac{n(n-1)}{n^2+a^2}I_{n-2} - \frac{a}{n^2+a^2}.$$

20. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\text{(i)} \int \frac{\mathrm{e}^x}{2+2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x \qquad \text{(ii)} \int \frac{\tan^{-1}(x+2)}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x$$

21. Έστω το ολοκλήρωμα

$$I_{2n-1} = \int_0^1 \frac{x^{2n-1}}{x^2+1}\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Χωρίς να γίνει ολοκλήρωση, να δειχθεί ότι

$$I_{2n+1} + I_{2n-1} = \int_0^1 x^{2n-1}\mathrm{d}x.$$

Αφού υπολογισθεί το πιο πάνω ολοκλήρωμα, να βρεθεί αναδρομικός τύπος για το I_{2n+1}. Στη συνέχεια να υπολογισθεί το I_5.

22. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\text{(i)} \int \frac{6x+6}{3x^2+6x+28}\mathrm{d}x \qquad \text{(ii)} \int \frac{1}{3x^2+6x+28}\mathrm{d}x$$

Στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{2x+1}{3x^2+6x+28}\mathrm{d}x.$$

23. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\text{(i)} \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}-3\mathrm{e}^x} \qquad \text{(ii)} \int \frac{\sin x\mathrm{d}x}{\cos x(1+\cos^2 x)} \qquad \text{(iii)} \int \frac{(2+\tan^2 x)\sec^2 x}{1+\tan^3 x}\mathrm{d}x$$

24. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\text{(i)} \int \frac{\mathrm{d}x}{1-2\sin x} \qquad \text{(ii)} \int \frac{\mathrm{d}x}{2-\cos x} \qquad \text{(iii)} \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}$$

25. Χρησιμοποιώντας την κατάλληλη αντικατάσταση να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\text{(i)} \int (x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x \qquad \text{(ii)} \int x^3(1-x)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x \qquad \text{(iii)} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$$

26. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\text{(i)} \int \frac{\mathrm{d}x}{1-\sin\frac{x}{2}} \qquad \text{(ii)} \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos 3x} \qquad \text{(iii)} \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4-9\ln^2 x}}$$

$$\text{(iv)} \int \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+3}\mathrm{d}x \qquad \text{(v)} \int \frac{\mathrm{d}x}{x+x^{\frac{1}{3}}} \qquad \text{(vi)} \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sec 2x}$$