



## Ασκήσεις

1. Να αποδειχθεί ότι

$$(\sinh x + \cosh x)^n = \sinh nx + \cosh nx.$$

2. Να αποδειχθούν οι επόμενες ιδιότητες της  $\tanh x$ :

(i)  $-1 < \tanh x < 1, \forall x$

(ii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = 1$

(iii)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = -1$

3. Να βρεθεί η παράγωγος των πιο κάτω συναρτήσεων:

(i)  $y = (\tanh^{-1} x)^2$    (ii)  $y = \ln(\cosh^{-1} x)$    (iii)  $y = \cosh^{-1}(\sinh^{-1} x)$

4. Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{d}{dx} (\operatorname{sech}^{-1}|x|) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

5. Αν  $u = \tanh^{-1}(-\frac{3}{5})$ , να βρεθούν: (i)  $\cosh u$  (ii)  $\sinh u$  (iii)  $\cosh 2u$

6. Αν  $u = \operatorname{cosech}^{-1}(-\frac{5}{12})$ , να βρεθούν: (i)  $\coth u$  (ii)  $\sinh u$  (iii)  $\cosh u$  (iv)  $\sinh 2u$

7. Εφαρμόζοντας το θεώρημα της μέσης τιμής στη συνάρτηση  $f(x) = \tanh^{-1} x$  στο διάστημα  $[0, x]$ , όπου  $x < 1$ , να δειχθεί ότι

$$x < \tanh^{-1} x < \frac{x}{1-x^2}.$$

8. Να λυθεί η εξίσωση

$$\cosh^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) + \cosh^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) = \ln(x) - \ln(x-1), \quad x > 1.$$

9. Να λυθεί η εξίσωση  $12 \cosh^2 x - 25 \sinh x = 0$ .

10. Δίνεται ότι  $5 \cosh x - 3 \sinh x = R \cosh(x - \alpha)$ . Να βρεθούν οι τιμές των σταθερών  $\alpha$  και  $R$ . Στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση

$$5 \cosh x - 3 \sinh x = 5 \sinh(x - \ln 2).$$

11. Να υπολογισθεί το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sinh ax}{e^x},$$

όπου  $a$  είναι θετική σταθερά.

12. (i) Να δειχθεί ότι για κάθε τιμή του  $x$  ισχύει  $\cosh x \geq 1$ .

(ii) Να δειχθεί ότι για κάθε τιμή του  $x$  ισχύει  $0 < \operatorname{sech} x \leq 1$ .

(iii) Να γίνει η γραφική παράσταση της  $y = \operatorname{sech} x$ .

13. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$(i) \int \sinh^3 x \cosh^2 x dx \quad (ii) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 17}} \quad (iii) \int \frac{dx}{4x^2 + 12x + 5}$$

14. Να δειχθεί ότι

$$\tanh^{-1} \left( \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right) + \operatorname{csch}^{-1} x = \ln \left( 1 + \sqrt{1 + x^2} \right), \quad x > 0.$$

15. Να λυθεί η εξίσωση

$$\cosh(\ln x) = \sinh \left( \ln \frac{x}{4} \right) + \frac{19}{8}.$$

16. Να δειχθεί ότι για κάθε  $x \in (0, 1)$  ισχύει

$$\frac{x^2}{4} < x - \ln(1 + x) < \frac{x^2}{2}.$$

17. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$(i) \int \frac{x+1}{x} dx \quad (ii) \int \frac{x dx}{2x+1} \quad (iii) \int \frac{\sec^3 x + e^{\sin x}}{\sec x} dx$$

18. Αν  $y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ , να δειχθεί ότι  $\frac{dy}{dx} = 1 - y^2$ .

19. Να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sin^{-1} \frac{x-1}{x+1} \quad \text{και} \quad g(x) = 2 \tan^{-1} \sqrt{x}$$

με  $x \geq 0$  έχουν την ίδια παράγωγο και επομένως

$$f(x) = g(x) + c.$$

Να βρεθεί η τιμή του  $c$ .