

Ασκήσεις

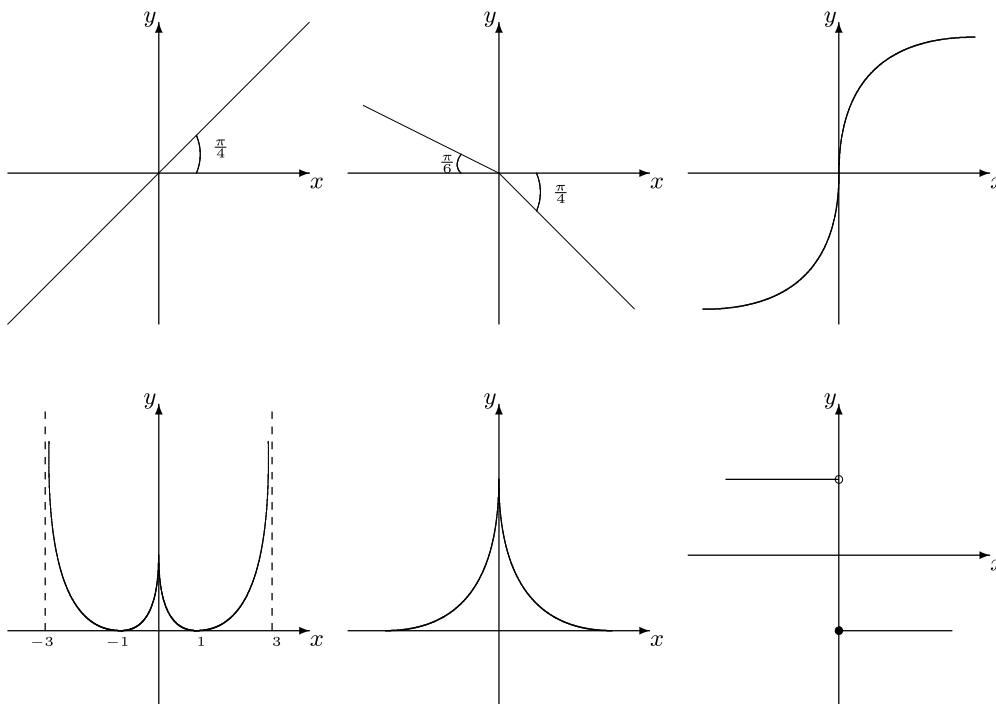
1. Να χρησιμοποιηθεί ο ορισμός της παραγώγου για να βρεθούν οι παράγωγοι των πιο κάτω συναρτήσεων

$$(i) f(x) = \frac{1}{x+1} \quad (ii) f(x) = \sqrt{x+1} \quad (iii) f(x) = x^{1/3}$$

$$(iv) f(x) = \cos x \quad (v) f(x) = \tan x \quad (vi) f(x) = \sec x$$

2. Να βρεθούν οι τιμές των σταθερών a και b αν η εφαπτομένη της καμπύλης $y = ax^2 + bx$ στο σημείο $(1, 5)$ έχει κλίση ίση με $\lambda = 8$.

3. Να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις των παραγώγων των συναρτήσεων των οποίων τα διαγράμματα δίνονται στα παρακάτω σχήματα :



4. Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ \sqrt{x+2}, & -2 \leq x < 0 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} x+2, & x < -2 \\ x+2 - \sqrt{x+2}, & -2 \leq x < 0 \end{cases}$$

Να εξεταστεί αν οι συναρτήσεις f_1 , f_2 , $f_1 + f_2$ είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $x = -2$.

5. (α) Αν $y = \frac{\sin x}{x}$ να δειχθεί ότι $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$.
 (β) Αν $x^2 + y^2 = 2y$ να δειχθεί ότι $(1 - y)^3 y'' = 1$.
 (γ) Αν $y = \sqrt{\sec 2x}$ να δειχθεί ότι $y'' - 3y^5 + y = 0$.
 (δ) Αν $y = \sqrt{5x^2 + 3}$ να δειχθεί ότι $yy'' + (y')^2 = 5$.

6. Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη, να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+3h)]^2 - [f(x+h)]^2}{h}.$$

7. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 1 \\ k(x-1), & x > 1 \end{cases}$$

Να βρεθούν οι τιμές του k για τις οποίες η f είναι (α) συνεχής και (β) παραγωγίσιμη.

8. Να δειχθεί ότι η παράγωγος μιας άρτιας συνάρτησης είναι περιττή και αντίστροφα.
 9. Η συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,2]$. Επιπλέον ισχύει $f(1) = 3$ και $|f'(x)| \leq 2, \forall x \in (0,2)$. Να αποδειχθεί ότι $1 \leq f(x) \leq 5, \forall x \in (0,2)$.
 10. Έστω ότι οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο $[0,1]$ και δεν μηδενίζονται στο $(0,1)$. Επιπλέον ισχύει $f(0) = g(1) = 0$. Να δειχθεί ότι η εξίσωση

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} = 0$$

έχει τουλάχιστο μια ρίζα στο $(0,1)$.

11. Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες
 1. $f(x+y) = f(x)f(y)$
 2. $f(x) = 1 + xg(x)$, όπου $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$
 $\forall x, y \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι $f'(x) = f(x)$.
 12. Έστω η καμπύλη η οποία περιγράφεται παραμετρικά, $x = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 7, y = t^2 + t + 1$. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου t για τις οποίες η καμπύλη έχει (α) οριζόντια και (β) κατακόρυφη εφαπτομένη.
 13. Να δειχθεί ότι η καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $x = t^2 - 3t + 5, y = t^3 + t^2 - 10t + 9$ τέμνει τον εαυτό της στο σημείο $(3, 1)$. Σε αυτό το σημείο να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης.
 14. Αν $y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$ να δειχθεί ότι

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} - y = 0.$$

15. Να βρεθούν οι παράγωγοι των πιο κάτω συναρτήσεων.

$$(i) f(x) = \tan^{-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \quad (ii) f(x) = \tan^{-1} (xe^{2x})$$

$$(iii) f(x) = \sin^{-1} (x^2 \ln x) \quad (iv) f(x) = \frac{\tan^{-1} x}{\ln x}$$

16. Να βρεθούν οι παράγωγοι των πιο κάτω συναρτήσεων.

$$(i) f(x) = 2x^2 \sqrt{2-x} \quad (ii) f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$$

$$(iii) f(x) = (x^2+3)^4 (2x^3-5)^3 \quad (iv) f(x) = \left(\frac{x^3-1}{2x^3+1} \right)^4$$

17. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας να βρεθούν οι παράγωγοι των πιο κάτω συναρτήσεων.

$$(i) f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \quad (ii) f(x) = (x^2 + 2x)^3 + 4$$

18. Να βρεθεί η n -οστή παράγωγος των πιο κάτω συναρτήσεων.

$$(i) f(x) = \frac{1}{x^2} \quad (ii) f(x) = \frac{1}{3x+2}$$

19. Να βρεθεί η παράγωγος της αντίστροφης συνάρτησης των πιο κάτω συναρτήσεων.

$$(i) f(x) = \sqrt{x-5} \quad (ii) f(x) = x^2 + 2 \quad (iii) f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$$

20. Δίνονται οι πιο κάτω εξισώσεις. Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος, y'' .

$$(i) x + xy + y = 2 \quad (ii) x^3 - 3xy + y^3 = 1$$

21. Ναδειχθεί ότι οι εφαπτόμενες των καμπυλών $5y - 2x + y^3 - x^2y = 0$ και $2y + 5x + x^4 - x^3y^2 = 0$ στην αρχή των αξόνων τέμνονται κάθετα.

22. Ναδειχθεί ότι η έλλειψη $4x^2 + 9y^2 = 45$ και η υπερβολή $x^2 - 4y^2 = 5$ είναι ορθογώνιες.

23. Ναδειχθεί ότι οι εφαπτόμενες των καμπυλών $y = \ln(x-2)$ και $y = x^2 - 4x + 3$ στο σημείο τομής $(3,0)$ σχηματίζουν γωνία ίση με $\tan^{-1} \frac{1}{3}$.

24. Να βρεθεί η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος των πιο κάτω συναρτήσεων οι οποίες ορίζονται παραμετρικά.

$$(i) x = 2 \sin t, y = \cos 2t \quad (ii) x = \cos^3 \theta, y = \sin^3 \theta$$

25. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης των πιο κάτω καμπυλών στο σημείο που δίνεται.

$$(i) x = 3e^t, y = 5e^{-t}, t = 0 \quad (ii) x = a \cos^4 \theta, y = a \sin^4 \theta, \theta = \frac{\pi}{4}$$

26. Αν $f'(x) = \sin(x^2)$ και $y = f\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$, να βρεθεί η παράγωγος $\frac{dy}{dx}$.