Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω

$y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(0)=-1,\ y'''(0)=-2\cdot(-1)\cdot 0=0,\ y''''(0)=-2y'''(0)y'(0)-2[y''(0)]^2=-2$

και επομένως

$$\ln\cos x=\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y''''(0)}{4!}x^4\cdots=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+\ldots$$

Θέτουμε στη πιο πάνω σειρά Maclaurin $x=\frac{\pi}{4}$, για να βρούμε

$$\ln\cos\tfrac{\pi}{4}=-\frac{\pi^2}{32}-\frac{\pi^4}{3072}+\cdots\Rightarrow -\tfrac{1}{2}\ln 2=-\frac{\pi^2}{32}-\frac{\pi^4}{3072}+\ldots$$

Άρα

$$\ln 2\simeq\frac{\pi^2}{16}\left(1+\frac{\pi^2}{96}\right).$$ ◄

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης και το διάστημα σύγκλισης των πιο κάτω σειρών:

$$\text{(i)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^k}{k^2}x^k,\quad \text{(ii)}\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{\sqrt{k}},\quad \text{(iii)}\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k}{k!}x^k,$$

$$\text{(iv)}\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{1+k^2},\quad \text{(v)}\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(x+1)^k}{k},\quad \text{(vi)}\ \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k(x+5)^k,$$

$$\text{(vii)}\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(x+1)^{2k+1}}{k^2+4},\quad \text{(viii)}\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\pi^k(x-1)^{2k}}{(2k+1)!}$$

2. Με τη χρήση του κριτηρίου της ρίζας να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης της $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^k}{(\ln k)^k}$.

3. Αν η δυναμοσειρά $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$ έχει ακτίνα σύγκλισης R, να δειχθεί ότι η $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{2k}$ έχει ακτίνα σύγκλισης ίση με $\sqrt{R}$.

4. Να βρεθεί το πολυώνυμο Maclaurin 4ου βαθμού ($n=4$) των πιο κάτω συναρτήσεων:

$$\text{(i)}\ \tan x\quad \text{(ii)}\ xe^x\quad \text{(iii)}\ \sec x\quad \text{(iv)}\ \ln(3+2x)$$

5. Να βρεθεί η σειρά Maclaurin των πιο κάτω συναρτήσεων. Να εκφραστεί η απάντηση στη μορφή $\sum u_k$

$$\text{(i)}\ \frac{1}{x+1}\quad \text{(ii)}\ \ln(x+1)\quad \text{(iii)}\ \cos\frac{x}{2}\quad \text{(iv)}\ \cosh x$$

6. Να βρεθεί η σειρά Taylor στο $x=a$ των πιο κάτω συναρτήσεων. Να εκφραστεί η απάντηση στη μορφή $\sum u_k$

$$\text{(i)}\ \frac{1}{x},\ a=-1\quad \text{(ii)}\ \ln x,\ a=1\quad \text{(iii)}\ \sin\pi x,\ a=\frac{1}{2}\quad \text{(iv)}\ \sinh x,\ a=\ln 4$$

7. Να βρεθεί το υπόλοιπο της μορφής Lagrange για τις πιο κάτω συναρτήσεις με τις δοσμένες τιμές του a και του n:

   (i) $x\mathrm{e}^x,\ a = 0,\ n = 3$ (ii) $\tan^{-1} x,\ a = 0,\ n = 2$

   (iii) $\sin x,\ a = \frac{\pi}{6},\ n = 4$ (iv) $\dfrac{1}{(1+x)^2},\ a = -2,\ n = 5$

8. Να αποδειχθεί ότι η σειρά Maclaurin της $\cos x$ συγκλίνει στην $\cos x$ για όλες τις τιμές του x.

9. Να αποδειχθεί ότι η σειρά Taylor της $\sin x$ στο $x = \frac{\pi}{4}$ συγκλίνει στην $\sin x$ για όλες τις τιμές του x.

10. Με τη χρήση γνωστών σειρών Maclaurin να βρεθεί η σειρά Maclaurin των πιο κάτω συναρτήσεων. Σε κάθε περίπτωση να δίνονται οι τέσσερις πρώτοι όροι και να δίνεται το διάστημα στο οποίο η σειρά συγκλίνει στη συνάρτηση.

    (i) $x\mathrm{e}^{-x}$ (ii) $x^2 \cos x$ (iii) $\sin^2 x$ (iv) $\ln(1-x^2)$ (v) $\dfrac{x^2}{1+3x}$ (vi) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

11. Με τη χρήση της σειράς Maclaurin της $\dfrac{1}{1-x}$ να εκφραστεί η $\dfrac{1}{x}$ σε δυνάμεις του $(x-1)$. Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης.

12. Με τη χρήση των σειρών Maclaurin των $\sin x$ και e^x, να υπολογιστούν τα πιο κάτω αθροίσματα

    (i) $\pi - \dfrac{\pi^3}{3!} + \dfrac{\pi^5}{5!} - \dfrac{\pi^7}{7!} + \dots$

    (ii) $1 - \ln 3 + \dfrac{(\ln 3)^2}{2!} - \dfrac{(\ln 3)^3}{3!} + \dots$

13. Με παραγώγιση της κατάλληλης σειράς Maclaurin, να βρεθεί η σειρά Maclaurin της $\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

14. Με ολοκλήρωση της κατάλληλης σειράς Maclaurin, να δειχθεί ότι για $-1 < x < 1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

15. Να υπολογιστεί το άθροισμα $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{k!}$.

    [**Υπόδειξη**: Να γίνει παραγώγιση της σειράς Maclaurin της $x\mathrm{e}^x$.]

16. Με τη χρήση δυναμοσειρών να υπολογιστούν τα όρια

$$\text{(i)}\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{x^2} \qquad \text{(ii)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-2x)}{x}$$

17. Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης των πιο κάτω δυναμοσειρών.

$$\text{(i)}\ \frac{x-3}{1\cdot 3} + \frac{(x-3)^2}{2\cdot 3^2} + \frac{(x-3)^3}{3\cdot 3^3} + \frac{(x-3)^4}{4\cdot 3^4} + \dots$$

$$\text{(ii)}\ 1 + \frac{3x-2}{5} + \frac{(3x-2)^2}{5^2} + \frac{(3x-2)^3}{5^3} + \dots$$

(iii) $1 + \dfrac{x}{1-x} + \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^3 + \dots$

(iv) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{x^2+6x+7}{2^2} + \dfrac{(x^2+6x+7)^2}{2^3} + \dfrac{(x^2+6x+7)^3}{2^4} + \dots$

18. Να δειχθεί ότι

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = x - \frac{x^3}{3\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \dots,\ \forall x$$