Παράδειγμα: Να εξεταστεί αν πιο κάτω σειρές συγκλίνουν.

$$\text{(i)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n} \quad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\tan^{-1} n)^n}$$

Λύση: (i) Χρησιμοποιώντας το κριτήριο ολοκλήρωσης, βρίσκουμε

$$\int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} = \lim_{l \to \infty} [\ln(\ln x)]_2^l = \infty.$$

Δηλαδή, η σειρά δεν συγκλίνει απόλυτα. Τώρα, η ακολουθία $\left\{\frac{1}{n \ln n}\right\}$ είναι φθίνουσα και $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n \ln n} = 0$ και επομένως η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ συγκλίνει με το κριτήριο της εναλλάσσουσας σειράς. Άρα η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ συγκλίνει σχετικά.

(ii) Χρησιμοποιούμε το κριτήριο ρίζας. Έχουμε

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\tan^{-1} n} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} < 1.$$

Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\tan^{-1} n)^n}$ συγκλίνει απόλυτα. ◀

Ασκήσεις

1. Να εξεταστεί αν οι πιο κάτω σειρές συγκλίνουν. Αν συγκλίνουν, να βρεθούν τα όριά τους:

$$\text{(i)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{7}{6^{k-1}} \qquad \text{(ii)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{2}\right)^{k+1} \qquad \text{(iii)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$$

$$\text{(iv)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k^2 + 3k - 2} \qquad \text{(v)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^{k+2}}{7^{k-1}} \qquad \text{(vi)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

2. Να δειχθεί ότι

$$\text{(i)} \sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = -\ln 2 \qquad \text{(ii)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k^2 + k}} = 1$$

$$\text{(iii)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{3}{2}$$

3. Να βρεθούν οι τιμές των σταθερών A και B έτσι ώστε

$$\frac{6^k}{(3^{k+1} - 2^{k+1})(3^k - 2^k)} = \frac{2^k A}{3^k - 2^k} + \frac{2^k B}{3^{k+1} - 2^{k+1}}$$

Στη συνέχεια να δειχθεί ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6^k}{(3^{k+1} - 2^{k+1})(3^k - 2^k)} = 2.$$

4. Χρησιμοποιώντας γεωμετρικές σειρές να δειχθεί ότι

$$\text{(i)}\ \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k = \frac{1}{1+x} \quad \text{αν} \quad -1 < x < 1$$

$$\text{(ii)}\ \sum_{k=0}^{\infty}(x-3)^k = \frac{1}{4-x} \quad \text{αν} \quad 2 < x < 4$$

$$\text{(iii)}\ \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{αν} \quad -1 < x < 1$$

5. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο απόκλισης να δειχθεί ότι οι πιο κάτω σειρές αποκλίνουν

$$\text{(i)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2+k+3}{2k^2+1} \qquad \text{(ii)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \qquad \text{(iii)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^k}{k}$$

6. Να δειχθεί ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(\ln k)^p}$ συγκλίνει αν $p > 1$ και αποκλίνει αν $p \leq 1$.

7. Να εφαρμοστεί το κριτήριο του λόγου στις πιο κάτω σειρές και να εξαχθούν συμπεράσματα για τη σύγκλισή τους.

$$\text{(i)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k}{k!} \qquad \text{(ii)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^k}{k^2} \qquad \text{(iii)}\ \sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\text{(iv)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^3} \qquad \text{(v)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^2+1} \qquad \text{(vi)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^3}{3^k}$$

8. Να εφαρμοστεί το κριτήριο της ρίζας στις πιο κάτω σειρές και να εξαχθούν συμπεράσματα για τη σύγκλισή τους.

$$\text{(i)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3k+2}{2k-1}\right)^k \qquad \text{(ii)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{1998}\right)^k \qquad \text{(iii)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{5^k} \qquad \text{(iv)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\mathrm{e}^{-k}\right)^k$$

9. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο ολοκλήρωσης να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι πιο κάτω σειρές:

$$\text{(i)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^2+1} \qquad \text{(ii)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{\mathrm{e}^k} \qquad \text{(iii)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$\text{(iv)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)[\ln(k+1)]^2} \qquad \text{(v)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tan^{-1}k}{1+k^2} \qquad \text{(vi)}\ \sum_{k=1}^{\infty}k^2\sin^2\frac{1}{k}$$

10. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι πιο κάτω σειρές:

$$\text{(i)}\ \sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{2}{3}\right)^k \qquad \text{(ii)}\ \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k} \qquad \text{(iii)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{7k-1}\right)^k$$

$$\text{(iv)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+\sqrt{k}} \qquad \text{(v)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{\mathrm{e}^k} \qquad \text{(vi)}\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+4)!}{4!\,k!\,4^k}$$

11. Χρησιμοποιώντας (α) το κριτήριο της ρίζας και (β) το κριτήριο του λόγου να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{3^k}$.

12. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο της σύγκρισης, να εξεταστούν ως προς την σύγκλιση οι πιο κάτω σειρές:

$$\text{(i)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k+5} \qquad \text{(ii)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5k^2-k} \qquad \text{(iii)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k-1}{3^k+2k}$$

$$\text{(iv)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k-\frac{1}{4}} \qquad \text{(v)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{\sqrt{k}+1} \qquad \text{(vi)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k+1}{k^2-k}$$

13. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο σύγκρισης του ορίου, να εξεταστούν ως προς την σύγκλιση οι πιο κάτω σειρές:

$$\text{(i)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2-2k+6}{8k^7+k-8} \qquad \text{(ii)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{3^k+1} \qquad \text{(iii)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{8k^2-3k}} \qquad \text{(iv)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+3)^{20}}$$

14. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι πιο κάτω σειρές:

$$\text{(i)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3+2k+1} \qquad \text{(ii)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k^3+1} \qquad \text{(iii)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+\sqrt{k}}{(k+1)^3-1} \qquad \text{(iv)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4+2^{-k}}$$

$$\text{(v)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} k}{k^2} \qquad \text{(vi)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k+k}{k\,!+3} \qquad \text{(vii)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k\sqrt{k}} \qquad \text{(viii)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(1/k)}{k^2}$$

15. Να δειχθεί ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ συγκλίνει, συγκρίνοντας τη με κατάλληλη γεωμετρική σειρά.

16. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο εναλλάσσουσας σειράς, να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι πιο κάτω σειρές:

$$\text{(i)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} \qquad \text{(ii)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{3^k} \qquad \text{(iii)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k+1}{3k+1} \qquad \text{(iv)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$$

17. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου για απόλυτη σύγκλιση, να εξεταστεί αν οι πιο κάτω σειρές συγκλίνουν απόλυτα:

$$\text{(i)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{5}\right)^k \qquad \text{(ii)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{3^k}{k^2} \qquad \text{(iii)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^3}{\mathrm{e}^k} \qquad \text{(iv)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k^k}{k!}$$

18. Να ταξινομηθούν οι πιο κάτω σειρές σε απολύτως συγκλίνουσες, σχετικώς συγκλίνουσες και αποκλίνουσες.

$$\text{(i)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{k+2}{3k-1}\right)^k \qquad \text{(ii)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k+2}{k(k+3)} \qquad \text{(iii)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \ln k}$$

$$\text{(iv)} \sum_{k=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{\ln k}\right)^k \qquad \text{(v)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \qquad \text{(vi)} \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2+1}{k^3+2}$$

19. Δίνεται ότι

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ..., \qquad \frac{\pi^4}{90} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + ...,$$

Να δειχθεί ότι

(i) $\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + ...$

(ii) $\frac{\pi^4}{96} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + ...$

20. Να βρεθεί το άθροισμα των πιο κάτω σειρών.

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$ (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)}$ (iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

21. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι πιο κάτω σειρές:

(i) $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \ldots$ (ii) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \ldots$

(iii) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{4\cdot 2^4} + \ldots$ (iv) $2 + \frac{3}{5} + \frac{4}{10} + \frac{5}{17} + \ldots$