Παράδειγμα: Να υπολογιστεί τα γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-4}}.$$

Λύση: Παρατηρούμε ότι το άνω άκρο τείνει στο άπειρο και η ολοκληρωτέα συνάρτηση δεν ορίζεται στο $x = 2$. Άρα το δοσμένο ολοκλήρωμα πρέπει να γραφτεί ως άθροισμα δύο γενικευμένων ολοκληρωμάτων,

$$\int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-4}} = \int_2^{a} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-4}} + \int_a^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-4}}.$$

Τώρα, υπολογίζουμε το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα. Θέτουμε $x = 2\sec\theta$, $\mathrm{d}x = 2\tan\theta\sec\theta\mathrm{d}\theta$,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-4}} = \int \frac{2\tan\theta\sec\theta\mathrm{d}\theta}{2\sec\theta 2\tan\theta} = \tfrac{1}{2}\theta + c = \tfrac{1}{2}\sec^{-1}\tfrac{x}{2} + c.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-4}} &= \lim_{l\to 2^+}\int_l^{a} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-4}} + \lim_{l\to\infty}\int_a^{l} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-4}} \\ &= \lim_{l\to 2^+}\left[\tfrac{1}{2}\sec^{-1}\tfrac{x}{2}\right]_l^a + \lim_{l\to\infty}\left[\tfrac{1}{2}\sec^{-1}\tfrac{x}{2}\right]_a^l \\ &= \tfrac{1}{2}\sec^{-1}\tfrac{a}{2} - 0 + \tfrac{1}{2}\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}\sec^{-1}\tfrac{a}{2} = \tfrac{\pi}{4},\end{aligned}$$

όπου a είναι οποιοσδήποτε αριθμός στο διάστημα $(2, \infty)$. ◀

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα πιο κάτω γενικευμένα ολοκληρώματα:

(i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ (ii) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x}}$ (iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\mathrm{d}x$

(iv) $\displaystyle\int_0^{9} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x}}$ (v) $\displaystyle\int_{-3}^{1} \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\mathrm{d}x$ (vi) $\displaystyle\int_0^{4} \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^{2/3}}$

(vii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ (viii) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$ (ix) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+4)}$

2. Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς a.

(i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x = 5$ (ii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = 1, \quad a > 0$

3. Δίνεται ότι $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Να υπολογιστούν τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

(i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ (ii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-a^2x^2}\mathrm{d}x, \quad a > 0$

4. Να βρεθούν τα πιο κάτω όρια:

$$\text{(i)} \lim_{x\to 0}\frac{2\cosh x-2}{1-\cos 2x} \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{x^2+3x} \qquad \text{(iii)} \lim_{x\to 2}\frac{\ln(5x-9)}{x^3-8}$$

$$\text{(iv)} \lim_{x\to 0}\frac{x-\tan^{-1}x}{x^3} \qquad \text{(v)} \lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{\ln(3x+4)} \qquad \text{(vi)} \lim_{x\to \pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos 3x}$$

5. Να βρεθούν οι τιμές των σταθερών a και b τέτοιες ώστε

$$\lim_{x\to 0}\frac{a+\cos bx}{x^2}=-4.$$

6. Να βρεθούν τα πιο κάτω όρια:

$$\text{(i)} \lim_{x\to 0}\frac{(2+x)\ln(1-x)}{(1-\mathrm{e}^x)\cos x} \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to +\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

7. Να υπολογιστούν τα πιο κάτω γενικευμένα ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int_0^1 \ln x\mathrm{d}x \qquad \text{(ii)} \int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x \qquad \text{(iii)} \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x$$

8. Να βρεθούν τα πιο κάτω όρια:

$$\text{(i)} \lim_{x\to 0}(1+2x)^{-\frac{3}{x}} \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to +\infty}\left[\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right]^{x^2} \qquad \text{(iii)} \lim_{x\to 0^+}\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)^{1/\ln x}$$

$$\text{(iv)} \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right) \qquad \text{(v)} \lim_{x\to +\infty}\left[x-\ln\left(1+2\mathrm{e}^x\right)\right] \qquad \text{(vi)} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{4\tan x}{1+\sec x}$$

9. Χρησιμοποιώντας ότι $\sqrt{1+t^3}\geq t^{3/2}$, για $t\geq 0$, να δειχθεί ότι

$$\int_0^{+\infty}\sqrt{1+t^3}\mathrm{d}t=+\infty.$$

Στη συνέχεια να βρεθεί το όριο

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\int_0^{2x}\sqrt{1+t^3}\mathrm{d}t}{x^{5/2}}.$$

10. Αν

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f'(x)=0 \ \text{ και } \ \lim_{x\to 0^+} f''(x)=a$$

να βρεθεί το όριο

$$\lim_{x\to +\infty}\left[xf\left(\frac{t}{\sqrt{x}}\right)\right], \quad t>0.$$

11. Να υπολογιστούν τα πιο κάτω γενικευμένα ολοκληρώματα

$$\text{(i)} \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^5} \qquad \text{(ii)} \int_0^1 \sqrt{x}\ln x\mathrm{d}x \qquad \text{(iii)} \int_0^4\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

12. Να βρεθούν τα πιο κάτω όρια

$$\text{(i)}\ \lim_{x\to 0}\frac{9^x-3^x}{x} \qquad \text{(ii)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t^2 \mathrm{d}t}{\sin x^2} \qquad \text{(iii)}\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-3}\right)^x$$

13. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα των x και την καμπύλη $y = x^{-1/3},\ 0 \leq x \leq 1$. Στη συνέχεια να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από τη περιστροφή του χωρίου γύρω από τον άξονα των x.

14. Να βρεθεί το μήκος του διαγράμματος της $f(x) = \sqrt{x-x^2} - \sin^{-1}\sqrt{x}$.

15. Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right).$$

16. Να βρεθούν τα πιο κάτω όρια:

$$\text{(i)}\ \lim_{x\to 1}\csc \pi x \ln x \qquad \text{(ii)}\ \lim_{x\to 0}(x-\sin^{-1}x)\csc^3 x \qquad \text{(iii)}\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{x-1}\right)$$

$$\text{(iv)}\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \qquad \text{(v)}\ \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} \qquad \text{(vi)}\ \lim_{x\to+\infty}\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)^{\mathrm{e}^x}$$

17. Να υπολογιστούν τα πιο κάτω γενικευμένα ολοκληρώματα

$$\text{(i)}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}\mathrm{d}x \qquad \text{(ii)}\ \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4} \qquad \text{(iii)}\ \int_0^1 x\ln x \mathrm{d}x$$

$$\text{(iv)}\ \int_{-\infty}^0\frac{\mathrm{d}x}{(4-x)^2} \qquad \text{(v)}\ \int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x} \qquad \text{(vi)}\ \int_0^{+\infty}x^3\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

18. Να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ των πιο κάτω καμπυλών και των ασύμπτωτων τους.

$$\text{(i)}\ y=\frac{8}{x^2+4} \qquad \text{(ii)}\ y=\frac{x}{(4+x^2)^2} \qquad \text{(iii)}\ y=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

19. Να δειχθεί ότι το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ αποκλίνει για όλες τις τιμές του p.

20. Να δειχθεί ότι το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ συγκλίνει για $p>1$ και αποκλίνει για $p\leq 1$.

21. Να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $y = x(x-1)\mathrm{e}^{-x}$ και τον θετικόν άξονα των x.