

Δηλαδή, η λύση του πιο πάνω συστήματος μας δίνει τις συντεταγμένες του P . Βρίσκουμε $P\left(\frac{2\lambda-9}{2\lambda-3}, \frac{-2\lambda-6}{2\lambda-3}\right)$. Ανάλογα, οι συντεταγμένες του σημείου Q είναι η λύση του συστήματος

$$y = \lambda x + 2 - \lambda \quad \text{και} \quad y + x = 12.$$

Βρίσκουμε $Q\left(\frac{\lambda+10}{\lambda+1}, \frac{11\lambda+2}{\lambda+1}\right)$. Από τη σχέση $AQ = 2AP$ βρίσκουμε

$$AQ^2 = 4AP^2 \Rightarrow$$

$$\left(1 - \frac{\lambda+10}{\lambda+1}\right)^2 + \left(2 - \frac{11\lambda+2}{\lambda+1}\right)^2 = 4 \left[\left(1 - \frac{2\lambda-9}{2\lambda-3}\right)^2 + \left(2 + \frac{2\lambda+6}{2\lambda-3}\right)^2 \right].$$

Λύνοντας την πιο πάνω εξίσωση βρίσκουμε $\lambda = \frac{1}{2}$ ή $\lambda = \frac{13}{2}$. Η τιμή $\lambda = \frac{1}{2}$ δίνει

$$P\left(4, \frac{7}{2}\right) \quad \text{και} \quad Q(7, 5)$$

και η τιμή $\lambda = \frac{13}{2}$ δίνει

$$P\left(\frac{2}{5}, -\frac{19}{10}\right) \quad \text{και} \quad Q\left(\frac{11}{5}, \frac{49}{5}\right).$$

Ασκήσεις

1. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.
2. Να δειχθεί ότι οι πιο κάτω δεκαδικοί αριθμοί είναι ρητοί:
 - (i) 0.123123123...
 - (ii) 12.7777...
 - (iii) 38.07818181...
 - (iv) 0.42960000...
3. Να λυθούν οι ανισώσεις:
 - (i) $\frac{4}{2-x} \leq 1$
 - (ii) $(x-4)(x+2) > 0$
 - (iii) $\frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{x-2}$
 - (iv) $x^3 - 3x + 2 \leq 0$
4. Να αποδειχθεί ότι
 - (i) $|a-b| \leq |a| + |b|$
 - (ii) $|a| - |b| \leq |a-b|$
 - (iii) $||a| - |b|| \leq |a-b|$
5. Να λυθούν οι εξισώσεις
 - (i) $|5x+4| = -1$
 - (ii) $|3x+2| = 5$
 - (iii) $|x-4|^2 - 4|x-4| = 12$
 - (iv) $\left|\frac{x-3}{x-4}\right| = 5$
 - (v) $|4x+5| = |8x-3|$

6. Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$(i) \left| \frac{3-2x}{2+x} \right| \leq 4 \quad (ii) \frac{1}{|x-4|} - \frac{1}{|x+7|} < 0$$

7. Να βρεθεί ο αριθμός M τέτοιος ώστε

$$(i) |x^3 - 2x^2 + 3x - 4| \leq M$$

για όλες τις τιμές του x στο διάστημα $[-3, 2]$.

$$(ii) \left| \frac{x+2}{x} - 5 \right| < M, \text{ όπου } x \in (1, 4).$$

8. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(i) Έχει κλίση ίση με -2 και τεταγμένη επί την αρχή ίση με 7 .

(ii) Διέρχεται από το σημείο $(-1, 2)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $3x + 2y = 5$.

(iii) Έχει τεταγμένη επί την αρχή ίση με 5 και τεταγμένη επί την αρχή ίση με 2 .

(iv) Σχηματίζει γωνία $\theta = \frac{\pi}{2}$ με τον άξονα των x και διέρχεται από το σημείο $(5, -2)$.

(v) Σχηματίζει γωνία $\phi = \frac{\pi}{4}$ με την ευθεία $y = 3x + 4$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

9. Να βρεθούν οι τιμές της σταθεράς k για τις οποίες η ευθεία με εξίσωση $3x + ky = 4$

(i) έχει κλίση ίση με 2 ,

(ii) τεταγμένη επί την αρχή ίση με 5 ,

(iii) διέρχεται από το σημείο $(-2, 4)$,

(iv) είναι παράλληλη με την ευθεία $2x - 5y = 1$,

(v) είναι κάθετη με την ευθεία $4x + 3y = 2$.

10. (α) Να αποδειχθεί ότι ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ έχει κέντρο $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ και ακτίνα ίση με $\frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$.

(β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής $y = Ax^2 + Bx + C$.

11. Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοκαθέτου στο ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα με συντεταγμένες $A(-2, -3)$ και $B(1, 1)$.

12. Το σημείο (x, y) κινείται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων από τα σημεία $(4, 1)$ και $(2, -5)$ είναι ίσο με 45 . Να αποδειχθεί ότι το σημείο κινείται πάνω σε κύκλο. Στη συνέχεια να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου.

13. Δίνεται τρίγωνο με κορυφές $A(-4, 2)$, $B(0, -1)$ και $C(3, 3)$. Να βρεθούν η περίμετρος και οι γωνίες του τριγώνου.

14. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $A(1, 1)$, $B(2, 0)$ και $C(-1, -3)$. Στη συνέχεια να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου και η ακτίνα του κύκλου.

15. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στην ευθεία $3y + x = 5$ και διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $2x + 3y = 13$ και $5x - 4y = -2$.

16. Να λυθούν οι ανισώσεις

$$(i) \left| \frac{2x-1}{x} \right| > 2 \quad (ii) \left| \frac{x}{x+2} \right| \leq 2 \quad (iii) |3x-4| \geq |2x+1|$$

17. Τα σημεία $(2, 4)$ και $(-1, 3)$ είναι απέναντι κορυφές ενός τετραγώνου του οποίου οι πλευρές είναι παράλληλες με τους άξονες. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των δύο άλλων κορυφών.

18. Να βρεθεί το σημείο το οποίο έχει ίση απόσταση από τα σημεία $(-1, 7)$, $(6, 6)$ και $(5, -1)$.

19. Έστω το σημείο (x_1, y_1) και η ευθεία ϵ με εξίσωση $Ax + By + C = 0$. Να δειχθεί ότι η απόσταση του σημείου αυτού από την ευθεία ϵ δίνεται από τη σχέση

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

20. Να βρεθούν οι εξισώσεις των παράλληλων ευθειών της ευθείας $3x + 4y = 7$ οι οποίες έχουν κάθετη απόσταση από αυτή ίση με 4.

21. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου ο οποίος έχει το ίδιο κέντρο με τον κύκλο $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 1 = 0$ και είναι εφαπτόμενος στην ευθεία $2x - y = 3$.

22. Να βρεθούν οι εξισώσεις των δύο κύκλων οι οποίοι έχουν τα κέντρα τους πάνω στην ευθεία $4x + 3y = 8$ και εφάπτονται την ευθεία $x + y = -2$ και στην ευθεία $7x - y = -6$.

23. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $(4, 10)$ και εφάπτονται στον κύκλο $x^2 + y^2 - 4y = 36$.

24. Ένα σημείο (x, y) κινείται έτσι ώστε η απόσταση του από την ευθεία $x = 5$ να είναι διπλάσια από την απόσταση από την ευθεία $y = 8$. Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς του σημείου.

25. Να βρεθεί το σημείο πάνω στην ευθεία $y = 2x + 1$ που έχει ίση απόσταση από τα σημεία $(0, 0)$ και $(5, -2)$.