

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ



ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

(ΜΑΣ 001)

Τελική εξέταση

Τρίτη 15 Δεκεμβρίου, 2015

1. (α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{|x-2| - |2x+1|}$.

(β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4x - 3$. Να περιοριστεί το πεδίο ορισμού της έτσι ώστε να έχει αντίστροφη. Στη συνέχεια να βρεθεί η αντίστροφή της, δίνοντας επίσης το πεδίο ορισμού της.

(γ) Να βρεθούν οι τιμές της σταθεράς k , έτσι ώστε η γραφική παράσταση της παραβολής $y = x^2 + 3kx + k$ να βρίσκεται πάνω από τον άξονα των x .

2. (α) Να διατυπωθεί ο ορισμός της συνέχειας στο σημείο $x = a$.

Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς a έτσι ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan 3x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο σημείο $x = 0$.

(β) Να διατυπωθεί ο ορισμός της παραγώγου.

Έστω η συνάρτηση $f(x)$ η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες:

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$ για κάθε x και y ,

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.

Να βρεθούν: (i) $f(0)$ (ii) $f'(0)$ (iii) $f'(x)$

(γ) Αν $y = \frac{\sin x}{x}$, να δειχθεί ότι $xy'' + 2y' + xy = 0$.

3. Έστω η καμπύλη $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + px + q}$, η οποία τέμνει τον άξονα των y στο σημείο $(0, 1)$ το οποίο είναι και τοπικό ακρότατο, έχει γραμμικές ασύμπτωτες τις ευθείες $x = 2$, $x = 4$ και $y = 3$. Να βρεθούν οι τιμές των σταθερών a , b , c , p και q .

Στη συνέχεια να γίνει η γραφική παράσταση της καμπύλης.

Να βρεθούν τα απόλυτα ακρότατα της καμπύλης στο διάστημα $[-1, 1]$ και στη συνέχεια να δειχθεί ότι

$$2 \leq \int_{-1}^1 y dx \leq \frac{10}{3}.$$

4. (α) Να διατυπωθεί το θεώρημα μέσης τιμής.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2}, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$. Να δειχθεί ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα $[0, 4]$. Στη συνέχεια να βρεθεί $\xi \in (0, 4)$, έτσι ώστε να ικανοποιείται το θεώρημα μέσης τιμής.

(β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^3 |x^2 - 3x + 2| dx$.

(γ) Έστω το ολοκλήρωμα $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$. Να δειχθεί ότι

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = \cos t$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx.$$

5. (α) Να δειχθεί ότι $\frac{d}{dx} \left(\tan^{-1} \frac{x}{a} \right) = \frac{a}{a^2 + x^2}$.

Στη συνέχεια να υπολογιστούν τα πιο κάτω ολοκληρώματα με τη χρήση των δοσμένων αντικαταστάσεων ή διαφορετικά.

$$(i) \int \frac{dx}{4 \cos^2 x + \sin^2 x} \quad (u = \tan x) \qquad (ii) \int \frac{dx}{2 + \sin x} \quad \left(u = \tan \frac{x}{2} \right)$$

(β) Έστω $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Να δειχθεί ότι $f(3) = 0$.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}.$$

(γ) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int e^x \sin x dx$.