

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ



ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

(ΜΑΣ 001)

Ενδιάμεση εξέταση

Σάββατο 14 Νοεμβρίου, 2015

1. (α) Η κλίση μιας καμπύλης $y = f(x)$, όπου $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση, σ' ένα οποιοδήποτε σημείο (x, y) δίνεται από την εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)^4(x-2)^3(x-3)^2(x-4)}{x^{\frac{2}{3}}}.$$

Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία της καμπύλης και στη συνέχεια να εξεταστεί η καμπύλη ως προς τη μονοτονία και να προσδιορισθούν (αν υπάρχουν) τα τοπικά της ακρότατα.

(β) Να δειχθεί ότι $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Αν $y = (x+2)\sqrt{1-x^2} + (2x+1)\sin^{-1} x$, να δειχθεί ότι

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

2. (α) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου, να δειχθεί ότι $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$.

$$[\sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A]$$

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

(i) Να δειχθεί ότι $f(2) = f'(2) = 0$.

(ii) Να γίνει η γραφική παράσταση της καμπύλης $y = x^3 - 3x^2 + 4$, δείχνοντας στο διάγραμμα τα σημεία τομής με τους άξονες.

(iii) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της καμπύλης $y = \frac{1}{x^3 - 3x^2 + 4}$.

(iv) Να γίνει η γραφική παράσταση της καμπύλης $y = \frac{1}{x^3 - 3x^2 + 4}$.

3. Δίνεται η καμπύλη $y = \frac{2x^2}{x-1}$.

- (i) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της καμπύλης με τους δύο άξονες.
- (ii) Να εξεταστεί το πρόσημο της καμπύλης.
- (iii) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι γραμμικές ασύμπτωτες της καμπύλης.
- (iv) Να δειχθεί ότι τα σημεία $(0, 0)$ και $(2, 8)$ είναι τα στάσιμα σημεία της καμπύλης.
- (v) Να εξεταστεί η καμπύλη ως προς τη μονοτονία και να βρεθούν τα τοπικά της ακρότατα.
- (vi) Να γίνει η γραφική παράσταση της καμπύλης.
- (vii) Να βρεθούν τα απόλυτα ακρότατα της καμπύλης στο διάστημα $[\frac{3}{2}, 3]$.

4. (α) Αν μια καμπύλη $y = f(x)$ ορίζεται παραμετρικά από τις εξισώσεις $x = \sin^{-1} t$ και $y = \sqrt{1-t^2}$, να δειχθεί ότι

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1.$$

Στη συνέχεια να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $(\frac{\pi}{2}, 0)$ της καμπύλης.

(β) Να βρεθούν τα απόλυτα ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 2, & x < 1 \\ x^2 - 5x + 6, & x \geq 1 \end{cases}$$

στο διάστημα $[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}]$.

5. (α) Να διατυπωθεί το Θεώρημα μέσης τιμής.

Να δειχθεί ότι $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Να δειχθεί ότι $\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x$ για $x > 0$.
[$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$]

(β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x^2 - 4)$. Να δειχθεί ότι $f'(x) = \frac{8(x^2 - 1)}{3x^{\frac{1}{3}}}$.

Να δειχθεί ότι το σημείο $(0, 0)$ είναι σημείο ανάκαμψης της καμπύλης $y = f(x)$. Στη συνέχεια να σχεδιαστεί το σημείο ανάκαμψης.