



Ασκήσεις Κεφαλαίου 7

1. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ ii. $\int x \tan^{-1} x dx$ iii. $\int e^{-3x} \sin 3x dx$ iv. $\int \cos(\ln x) dx$

v. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$ vi. $\int \frac{x}{x^2 + 6x + 13} dx$

2. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$ ii. $\int \sqrt{\cos x} \sin x dx$ iii. $\int \tan^3 x \sec^5 x dx$ iv. $\int \operatorname{cosec}^4 x dx$

v. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 25}}$ vi. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2 - \sin^2 x}} dx$ vii. $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{\sqrt{2x^2 - 4}}{x} dx$ viii. $\int_0^3 \frac{x^3 dx}{(3 + x^2)^{5/2}}$

3. Δίνεται ότι $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$. Να δειχθεί ότι $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

4. Δίνεται ότι $I_{2n-1} = \int_0^1 \frac{x^{2n-1}}{x^2 + 1} dx$, $n = 1, 2, 3, \dots$ Χωρίς να γίνει ολοκλήρωση να δειχθεί ότι

$$I_{2n+1} + I_{2n-1} = \int_0^1 x^{2n-1} dx.$$

Αφού υπολογιστεί το πιο πάνω ολοκλήρωμα να βρεθεί αναδρομικός τύπος για το I_{2n+1} και να υπολογιστεί το I_5 .

5. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6 \sin x + 12} dx$ ii. $\int \frac{dx}{x^3 + x}$ iii. $\int \frac{dx}{1 + e^x}$

iv. $\int \frac{\sec^2 x}{\tan^3 x - \tan^2 x} dx$

6. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i. $\int \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} dx$ ii. $\int e^{\sqrt{x}} dx$ iii. $\int \frac{1+x}{\sqrt{x}} dx$

iv. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$ v. $\int \frac{1}{x^{1/2} + x^{1/4}} dx$



7. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = \frac{1}{u}$, να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

i. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4} dx$ ii. $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{3-x^2}} dx$ iii. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+1}}$ iv. $\int \frac{\sqrt{x^2-5}}{x^4} dx$

8. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{(x-1)^{5/2}} dx$ ii. $\int \sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} dx$ iii. $\int \frac{dx}{(4-x)\sqrt{x-1}}$

9. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

i. $\int \frac{\sin x}{\cos x(1+\cos^2 x)} dx$ ii. $\int \frac{(2+\tan^2 x)\sec x}{1+\tan^3 x} dx$ iii. $\int (x^2-1)^{\frac{3}{2}} dx$
iv. $\int x^3(1-x)^{\frac{1}{3}} dx$ v. $\int \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx$ vi. $\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+3} dx$
vii. $\int \frac{1}{x+x^{1/3}} dx$ viii. $\int \frac{1}{1+\sec 2x} dx$

10. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

i. $\int \frac{1}{2+\sin x} dx$ ii. $\int \frac{1}{\sin x - \tan x} dx$ iii. $\int \frac{1}{1-2\sin x} dx$
iv. $\int \frac{1}{2-\cos x} dx$ v. $\int \frac{1}{1+\sin x + \cos x} dx$