

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κεφάλαιο 1

- 1** (i) $\frac{41}{333}$ (ii) $\frac{115}{9}$ (iii) $\frac{537}{1250}$
2 (i) $x \in (-\infty, -2] \cup (2, +\infty)$ (ii) $x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$
 (iii) $x \in (-\infty, -\frac{5}{2}] \cup (-1, 2)$ (iv) $x \leq -2$ (Η ισότητα ισχύει και για $x = 1$.)
3 (i) Αδύνατη (ii) $x = 1$ ή $x = -\frac{7}{3}$ (iii) $x = -2$ ή $x = 10$
 (iv) $x = \frac{17}{4}$ ή $x = \frac{23}{6}$ (v) $x = -\frac{1}{6}$ ή $x = 2$
4 (i) $x \leq -\frac{11}{2}$ (ii) $x \in (-\infty, -7) \cup (-7, -\frac{3}{2})$
5 (i) $x < 0$ ή $0 < x < \frac{1}{4}$ (ii) $x \leq -4$ ή $x \geq -1$ (iii) $x > 5$ ή $x < \frac{3}{5}$
6 (i) $y = -2x + 7$ (ii) $2x - 3y + 8 = 0$ (iii) $x = 5$ (iv) $x = 5$ $y = -2x$, $y = \frac{1}{2}x$
7 (i) $k = -\frac{3}{2}$ (ii) $k = \frac{4}{5}$ (iii) $k = \frac{5}{2}$ (iv) $k = -\frac{15}{2}$ (v) $k = -4$
8 $y = -\frac{3}{4}x - \frac{11}{8}$
9 $P = 10 + 5\sqrt{2}$, $A = C = \frac{\pi}{4}$, $B = \frac{\pi}{2}$
10 $x^2 + (y + 1)^2 = 5$
11 $y = 3x - 3$
12 $3x + 4y = -13$, $3x + 4y = 27$
13 $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 5$
14 $(x - 2)^2 + y^2 = 2$ και $(x + 4)^2 + (y - 8)^2 = 18$
15 $y = -3x + 22$ και $x - 3y + 26 = 0$
16 $x - 2y + 11 = 0$ ή $x + 2y - 21 = 0$
17 $(\frac{33}{2}, 34)$
18 (i) κύκλος $K(-4, 0)$, $R = 2\sqrt{2}$
 (ii) Δεν έχει γραφική παράσταση
 (iii) Σημείο $(2, -1)$
 (iv) κύκλος $K(-1, 1)$, $R = \sqrt{2}$
19 (i) $K(-\frac{1}{2}, \frac{7}{4})$ (ii) $K(2, 9)$ (iii) $K(\frac{3}{2}, -\frac{25}{4})$ (iv) $K(\frac{3}{4}, -\frac{1}{8})$

Κεφάλαιο 2

- 1** (i) $x \in \mathbb{R}$, $f \in [-\frac{1}{4}, +\infty)$
 (ii) $x \in \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R}$
 (iii) $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
 (iv) $x \in \mathbb{R}$, $f \in [-2, +\infty)$
 (v) $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, $f \in (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$
4 $x \in \mathbb{R} - \{1, 5\}$. Για το δεύτερο ερώτημα δεν υπάρχει μοναδική λύση. Μια λύση είναι η: $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = x^2 + x - 6$, $f_3(x) = |x - 3|$.
5 $c = 5$
6 (i) $\sqrt{1 - x^2} + \sin 3x$, $x \in [-1, 1]$
 (ii) $\sqrt{1 - x^2} - \sin 3x$, $x \in [-1, 1]$
 (iii) $\sqrt{1 - x^2} \cdot \sin 3x$, $x \in [-1, 1]$
 (iv) $\frac{\sqrt{1 - x^2}}{\sin 3x}$, $x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$
 (v) $\sqrt{1 - \sin^2 3x}$, $x \in \mathbb{R}$
 (vi) $\sin(3\sqrt{1 - x^2})$, $x \in [-1, 1]$

- 7** (i) $x^{1/4} - 2$, $x \in [16, +\infty)$
 (ii) $x^2 - 3$, $x \in [0, +\infty)$
 (iii) $\frac{1}{6}(-5 + \sqrt{12x + 49})$, $x \in [-\frac{49}{12}, +\infty)$
 (iv) $\frac{1}{10}(1 + \sqrt{1 - 20x})$, $x \in (-\infty, \frac{1}{20}]$

8 $x = \frac{8}{5}$

9 $c = -2$

10 (i) $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ (ii) $x = 0$, $x = \ln(\frac{1}{2})$

12 (i) $y \neq 4$ (ii) $y \leq 5$ (iii) $y \in \{-1, 1\}$ (iv) $y \leq 0$

13 (i) $(-\infty, -4] \cup (0, +\infty)$ (ii) $[1, +\infty)$ (iii) $[-1, 2]$

15 $-5 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 3$

Κεφάλαιο 3

1 (i) 12 (ii) $\sqrt{5}$ (iii) 4 (iv) -1 (v) $\frac{1}{4}$ (vi) $-\frac{1}{2}$ (vii) 0 (viii) $\frac{5}{2}$ (ix) $\frac{1}{3}$

2 (i) k^2 (ii) $3 - k$ (iii) 0 (iv) 1 (v) 1 (vi) 2

- 3** (i) Συνεχής στο $\mathbb{R} - \{1\}$ (ii) Συνεχής στο $\mathbb{R} - \{-2\}$
 (iii) Συνεχής στο $[-1, 4) \cup (4, +\infty)$ (iv) Συνεχής στο $\mathbb{R} - \{-1\}$

4 $k = 3$

5 $a = -1$, $b = 2$

6 (i) 1 (ii) $\frac{1}{3}$ (iii) 0 (iv) 1 (v) e^a (vi) 1

7 $a = 1$, $b = 2$

8 $\lambda = \frac{\sqrt{2}-3}{6}$

9 Συνεχής στο $\mathbb{R} - \{0\}$

10 (i) 2 (ii) 1 (iii) -1

11 (i) $x = -1, 1$ διορθώσιμα σημεία (ii) $x = -5, 3$ διορθώσιμα σημεία

12 $k = \frac{1}{8}$

13 (i) $-\frac{1}{10}$ (ii) $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Κεφάλαιο 4

1 (i) $-\frac{1}{(x+1)^2}$ (ii) $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ (iii) $\frac{1}{3x^{2/3}}$ (iv) $-\sin x$ (v) $\sec^2 x$ (vi) $\tan x \sec x$

2 $a = 3$, $b = 2$

3 f_1 δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = -2$

f_2 δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = -2$

$f_1 + f_2$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = -2$

5 (i) $k \in \mathbb{R}$ (ii) $k = 2$

6 (i) $t = -\frac{1}{2}$ (ii) $t = 1$, $t = 4$

7 $y = 5x - 14$, $y = 6x - 17$

9 (i) $-\frac{1}{x^2+1}$ (ii) $\frac{e^{2x}+2xe^{2x}}{1+x^2e^{4x}}$ (iii) $\frac{2x \log x+x}{\sqrt{1-x^4 \log^2 x}}$ (iv) $\frac{x \log x-(1+x^2) \tan^{-1} x}{x(1+x^2) \log^2 x}$

10 (i) $\frac{x(8-5x)}{\sqrt{2-x}}$ (ii) $\frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$ (iii) $2x(x^2+3)^3(2x^3-5)^2(17x^3+27x-20)$ (iv) $\frac{36x^2(x^3-1)^3}{(2x^3+1)^5}$

11 (i) $2\sqrt{x-5}$ (ii) δεν υπάρχει αντίστροφη συνάρτηση (iii) $\frac{1}{5(x+2)^2}$

12 (i) $y'' = \frac{2(1+y)}{(1+x)^2}$ (ii) $y'' = -\frac{4xy}{(y^2-x)^3}$

16 (i) $y' = -2 \sin t$, $y'' = -1$ (ii) $y' = -\tan \theta$, $y'' = \frac{1}{3 \cos^4 \theta \sin \theta}$

17 (i) $5x + 3y - 30 = 0$, $3x - 5y + 16 = 0$ (ii) $2x + 2y - a = 0$, $x - y = 0$

18 $\frac{3}{(x+1)^2} \sin \left[\left(\frac{2x-1}{x+1} \right)^2 \right]$

Κεφάλαιο 5

2 $a = 5$, $b = \frac{33}{4}$

3 (i) φθίνουσα στο $(-\infty, -2] \cup [0, 2]$, αύξουσα στο $[-2, 0] \cup [2, +\infty)$

(ii) φθίνουσα στο $[-2 - \sqrt{7}, -2 + \sqrt{7}]$, αύξουσα στο $(-\infty, -2 - \sqrt{7}] \cup [-2 + \sqrt{7}, +\infty)$

(iii) φθίνουσα $\forall x \in \mathbb{R}$

5 $2\sqrt{2}$

6 $(-1, 0)$

7 $(\pm\sqrt{2}, 1)$

8 (i) A.E. = $\sqrt{3}$ A.M. = 2

(ii) A.E. = 0 A.M. = 18

(iii) A.E. = $-\sin 1$ A.M. = $\sin 1$

(iv) Δεν υπάρχουν απόλυτα ακρότατα

9 (i) A.E. = $-\frac{1}{4}$ A.M. = 2

10 $y = 1$, T.E.(A.E.) $(1, 0)$, T.M.(A.M.) $(-1, 4)$

11 $a = 1$, $b = -3$

12 $a = 3$, $b = -9$, $c = 13$

14 Αν $p > 0$, $\min = q - 2p^{\frac{3}{2}}$, $\max = q + 2p^{\frac{3}{2}}$. Αν $p \leq 0$ δεν υπάρχουν.

15 \min στο $(-1, -3)$, \max στο $(5, 3)$

16 $c = \frac{-1 + \sqrt{13}}{3}$

18 $c = 1$

20 (i) φθίνουσα: $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, αύξουσα: $x \in [\frac{1}{2}, +\infty)$, $\min (\frac{1}{2}, \frac{1}{4} - \ln 2)$

(ii) φθίνουσα: $x \in [0, 1) \cup (1, +\infty)$, αύξουσα: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0]$, $\max (0, -2)$

(iii) φθίνουσα: $x \in [1, +\infty)$, αύξουσα: $x \in (0, 1]$, $\max (1, 0)$

21 (i) A.E. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} - \ln 2)$

(ii) A.M. $(0, -2)$, A.E. $(-\frac{1}{2}, -\frac{8}{3})$

(iii) A.M. $(1, 0)$

Κεφάλαιο 6

1 (i) $\frac{2}{7}x^{7/2} + \frac{8}{9}x^{9/2} + c$ (ii) $\frac{2}{3}x^{3/2} - 2x^{1/2} + c$ (iii) $\sec x + c$ (iv) $\frac{\pi^2}{9} + 2\sqrt{3}$ (v) $\sqrt{2} - 1$ (vi) 20

2 $6x + \frac{5}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}$

3 $\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{13}{3}$

4 (i) 20 (ii) $\frac{17}{2}$ (iii) 48

6 (i) $x = \frac{25}{4}$ (ii) $x = \frac{1}{3}$ (iii) $x = 3$

7 (i) $x^* = -\frac{5}{4}$ (ii) $x^* = \frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$ (iii) $x^* = \sqrt{3}$

8 (i) $3x^2 \sin^2(x^3) - 2x \sin^2(x^2)$

(ii) $\frac{2}{1-x^2}$

(iii) $\left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \left(x^2 + \sqrt{x} + \sqrt{x^2 + \sqrt{x}} \right)$

9 (i) $F(1) = 0$ (ii) $F'(1) = \frac{1}{2}$

Κεφάλαιο 7

1 (i) $2\sqrt{x} \log x - 4\sqrt{x} + c$

(ii) $\frac{1}{2}(x^2 \tan^{-1} x - x + \tan^{-1} x) + c$

(iii) $-\frac{1}{6}e^{-3x}(\sin 3x + \cos 3x) + c$

(iv) $\frac{1}{2}x(\cos(\log x) + \sin(\log x)) + c$

(v) $\frac{e^x}{x+1} + c$

(vi) $\frac{1}{2} \log(x^2 + 6x + 13) - \frac{3}{2} \tan^{-1}\left(\frac{x+3}{2}\right) + c$

2 (i) $\sec x + c$

(ii) $-\frac{2}{3}(\cos x)^{2/3} + c$

(iii) $\frac{1}{7} \sec^7 x - \frac{1}{5} \sec^5 x + c$

(iv) $-\cot x - \frac{1}{3} \cot^3 x + c$ (v) $-\frac{\sqrt{25+x^2}}{25x} + c$ (vi) $\sin^{-1}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{2}}\right) + c$

(vii) $2 - \frac{\pi}{2}$ (viii) $\frac{5}{24\sqrt{3}}$

5 (i) $\frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{\sin x - 3}{\sqrt{3}}\right) + c$

(ii) $\log x - \log \sqrt{x+2+1} + c$

(iii) $-\log(e^{-x} + 1) + c$

(iv) $\frac{1}{\tan x} - \log |\tan x| + \log |\tan x - 1| + c$

6 (i) $-x - 4\sqrt{x} - 4 \log(\sqrt{x} - 1) + c$

(ii) $2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + c$

(iii) $2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x^{3/2} + c$

(iv) $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \sin^{-1} x + c$

(v) $2\sqrt{x} - 4x^{1/4} + \log(x^{1/4} + 1) + c$

7 (i) $-\frac{(4-x^2)^{3/2}}{12x^3} + c$

(ii) $-\frac{\sqrt{3-x^2}}{3x} + c$

(iii) $-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + c$

(iv) $\frac{1}{15} \left(1 - \frac{5}{x^2}\right)^{3/2} + c$

8 (i) $-\frac{1}{3} \left(\frac{2}{x-1} + 1\right)^{3/2} + c$

(ii) $(x-1) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + c$

(iii) $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{3}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{3}} \right| + c$

9 (i) $\ln \left| \frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{\cos x} \right| + c$

(ii) $\ln \left| 1 + \tan x + \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2 \tan x - 1}{\sqrt{3}} \right| + c$

(iii) $-\sec(\sin^{-1} \frac{1}{x}) + c$

(iv) $-\frac{3}{4}(1-x)^{4/3} + \frac{9}{7}(1-x)^{7/3} - \frac{9}{10}(1-x)^{10/3} + \frac{3}{13}(1-x)^{13/3} + c$

(v) $\frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right) + c$

(vi) $\frac{2}{3} \ln(e^{2x} + 3) - \frac{1}{3}x + c$

(vii) $\frac{3}{2} \ln[c(x^{2/3} + 1)], c > 0$

(viii) $x + \frac{1}{2}(\cot 2x - \csc 2x) + c$

10 (i) $\frac{2\sqrt{3}}{3} \tan^{-1} \left(\frac{2 \tan \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} \right) + c$ (ii) $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2 \tan^2 \frac{x}{2}} + \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| \right) + c$ (iii) $\frac{\sqrt{3}}{3} \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} - 2 - \sqrt{3}}{\tan \frac{x}{2} - 2 + \sqrt{3}} \right| + c$

(iv) $\frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}(\sqrt{3} \tan \frac{x}{2}) + c$ (v) $\ln \left| 1 + \tan \frac{x}{2} \right| + c$