ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Στα πιο κάτω παραδείγματα κάνουμε πράξεις μεταξύ μιγαδικών αριθμών:

```
> (4+I)+(3+2*I);
```

$$7+3\,I$$

```
> (2+I)*(1+2*I)/(1-I)^2;
```

$$\frac{-5}{2}$$

```
> (2*I-1)^2*(4/(1-I)+(2-I)/(1+I));
```

$$\frac{-11}{2}-\frac{23}{2}\,I$$

Στο επόμενο παράδειγμα θεωρούμε τους μιγαδικούς $z_1=-1-i,\ z_2=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$. Βρίσκουμε τα $z_1*z_2,\ Im(z_1+z_2),\ \bar{z}_2,\ Re\left(\frac{z_1}{z_2}\right),\ |z_2-z_1|$.

```
> z1:=-1-I; z2:=1/2+3/2*I;
```

$$z1:=-1-I$$

$$z2:=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\,I$$

```
> z1*z2;
```

$$1-2\,I$$

```
> Im(z1+z2);
```

$$\frac{1}{2}$$

```
> conjugate(z2);
```

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\,I$$

```
> Re(z1/z2);
```

$$\frac{-4}{5}$$

```
> abs(z2-z1);
```

$$\frac{\sqrt{34}}{2}$$

Πιο κάτω γράφουμε τα $\sin x$ και $\cos x$ σε εκθετική μορφή.

```
> cos(x) :  % = convert(%, exp);
```

$$\cos(x)=\frac{1}{2}\,e^{(x\,I)}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{e^{(x\,I)}}$$

```
> sin(x) : % = convert(%, exp);
```

$$\sin(x) = \frac{-1}{2}\, I\, (e^{(x\, I)} - \frac{1}{e^{(x\, I)}})$$

Στο επόμενο παράδειγμα απλοποιούμε την παράσταση:

$$\frac{(\cos\frac{1}{7}\pi - i\sin\frac{1}{7}\pi)^3}{(\cos\frac{1}{7}\pi + i\sin\frac{1}{7}\pi)^4}$$

```
> (cos(1/7*Pi)-I*sin(1/7*Pi))^3/(cos(1/7*Pi)+I*sin(1/7*Pi))^4 : % = convert(%, exp);
```

$$\frac{(\cos(\frac{\pi}{7}) - \sin(\frac{\pi}{7})\, I)^3}{(\cos(\frac{\pi}{7}) + \sin(\frac{\pi}{7})\, I)^4} = \frac{1}{(e^{(1/7\, I\, \pi)})^7}$$

Πιο απλοποιημένα γράφεται:

```
> simplify(%);
```

$$\frac{(\cos(\frac{\pi}{7}) - \sin(\frac{\pi}{7})\, I)^3}{8\cos(\frac{\pi}{7})^4 + 8\, I\cos(\frac{\pi}{7})^3\sin(\frac{\pi}{7}) - 8\cos(\frac{\pi}{7})^2 - 4\, I\cos(\frac{\pi}{7})\sin(\frac{\pi}{7}) + 1} = -1$$

Πιο κάτω υπολογίζουμε την τετραγωνική ρίζα των μιγαδικών αριθμών: $2i,\ 1+\sqrt{3}i$.

```
> sqrt(2*I);
```

$$1 + I$$

```
> sqrt(1+I*sqrt(3));
```

$$\sqrt{1 + \sqrt{3}\, I}$$

```
> evalc(%);
```

$$\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{1}{2}\, I\sqrt{2}$$

Αν $z = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$, βρήκαμε τα z^3 και z^5.

```
> z:=1/2*(-1+I*sqrt(3));
```

$$z := -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, I\sqrt{3}$$

```
> evalc(z^3);
```

$$1$$

```
> evalc(z^5);
```

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, I\sqrt{3}$$

Στα επόμενα παραδείγματα ζητάμε από το πρόγραμμα να εκφραστούν σε πολική μορφή ο μιγαδικός αριθμός $-3i$.

```
> polar(-3*I);
```

$$\text{polar}(3,\ \frac{\pi}{2})$$

Παρατηρούμε ότι το πρόγραμμα μας δίνει το μέτρο του μιγαδικού αριθμού και την γωνιά θ. Ο αριθμός τότε γράφεται την μορφή: $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. Στα επόμενα παραδείγματα, θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Όμοια με πριν, εκφράζουμε τα $z_1 z_2$ και $\frac{z_1}{z_2}$ σε πολική μορφή.

```
> z1:=1/2+I*sqrt(3)/2; z2:=-1-I;
```

$$z1 := \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,I\,\sqrt{3}$$

$$z2 := -1 - I$$

```
> evalc(z1*z2); polar(z1*z2);
```

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2})\,I$$

$$\text{polar}\left(\sqrt{2},\ \arctan\left(\frac{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right)$$

```
> evalc(z1/z2); polar(z1/z2);
```

$$-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4} + (\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4})\,I$$

$$\text{polar}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \arctan\left(\frac{\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}}{-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}}\right) - \pi\right)$$

Στο επόμενο παράδειγμα γράφουμε τον μιγαδικό αριθμό $\frac{1}{1+e^{i\theta}}$ στην μορφή $a + bi$.

```
> 1/(1+exp(I*x)) :  % = evalc(%);
```

$$\frac{1}{1 + e^{(x\,I)}} = \frac{1 + \cos(x)}{(1 + \cos(x))^2 + \sin(x)^2} - \frac{\sin(x)\,I}{(1 + \cos(x))^2 + \sin(x)^2}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Για να λύσουμε τις εξισώσεις $z^3 = -3,\ z^7 = -1,\ z^6 = 1,\ z^4 = 1 + \sqrt{3}i,\ z^2 + 2zi + 2 - 4i = 0$, γράφουμε:

```
> solve(z^3=-3);
```

$$-3^{(1/3)},\ \frac{3^{(1/3)}}{2} - \frac{1}{2}\,I\,3^{(5/6)},\ \frac{3^{(1/3)}}{2} + \frac{1}{2}\,I\,3^{(5/6)}$$

```
> solve(z^7=-1);
```

$$-1,\ -\cos(\frac{2\,\pi}{7}) - \sin(\frac{2\,\pi}{7})\,I,\ \cos(\frac{3\,\pi}{7}) - \sin(\frac{3\,\pi}{7})\,I,\ \cos(\frac{\pi}{7}) - \sin(\frac{\pi}{7})\,I,$$
$$\cos(\frac{\pi}{7}) + \sin(\frac{\pi}{7})\,I,\ \cos(\frac{3\,\pi}{7}) + \sin(\frac{3\,\pi}{7})\,I,\ -\cos(\frac{2\,\pi}{7}) + \sin(\frac{2\,\pi}{7})\,I$$

```
> solve(z^6=1);
```

$$-1,\ 1,\ -\frac{\sqrt{-2+2\,I\,\sqrt{3}}}{2},\ \frac{\sqrt{-2+2\,I\,\sqrt{3}}}{2},\ -\frac{\sqrt{-2-2\,I\,\sqrt{3}}}{2},\ \frac{\sqrt{-2-2\,I\,\sqrt{3}}}{2}$$

```
> solve(z^4=1+sqrt(3)*I);
```

$$(1+\sqrt{3}\,I)^{(1/4)},\ (1+\sqrt{3}\,I)^{(1/4)}\,I,\ -(1+\sqrt{3}\,I)^{(1/4)},\ -I\,(1+\sqrt{3}\,I)^{(1/4)}$$

```
> solve(z^2+2*I*z+2-4*I=0);
```

$$1+I,\ -1-3\,I$$

Για να υπολογίσουμε το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{k=0}^{n} e^{i(2k+1)\theta}$$

γράφουμε:

```
> Sum('e^(I*(2*k+1)*theta)','k'=0..n) = sum('e^(I*(2*k+1)*theta)', 'k'=0..n);
```

$$\sum_{k=0}^{n} e^{((2\,k+1)\,\theta\,I)} = \frac{e^{(\theta\,I)}\,(e^{(2\,I\,\theta)})^{(n+1)}}{e^{(2\,I\,\theta)}-1} - \frac{e^{(\theta\,I)}}{e^{(2\,I\,\theta)}-1}$$

Στο πιο κάτω παράδειγμα, θα υπολογίσουμε τα όρια

$$\lim_{z\to\infty}\frac{5z^3}{(z+1)^3},\quad \lim_{z\to\infty}\frac{z^3-5}{z+1}$$

$$\lim_{z\to\infty}\frac{4z+3i}{3z+2},\quad \lim_{z\to-2}\frac{2}{(z+2)^2}.$$

```
> Limit(5*z^3/(z+1)^3, z=infinity):%=value(%);
```

$$\lim_{z\to\infty}\frac{5\,z^3}{(z+1)^3}=5$$

```
> Limit((z^3-5)/(z+1), z=infinity):%=value(%);
```

$$\lim_{z\to\infty}\frac{z^3-5}{z+1}=\infty$$

```
> Limit((4*z+3*I)/(3*z+2), z=infinity):%=value(%);
```

$$\lim_{z\to\infty}\frac{4\,z+3\,I}{3\,z+2}=\frac{4}{3}$$

```
> Limit(2/(z+2)^2, z=-2):%=value(%);
```

$$\lim_{z\to(-2)}\frac{2}{(z+2)^2}=\infty$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Στο επόμενο παράδειγμα θα υπολογίσουμε τις παραγώγους των συναρτήσεων $f(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ και $g(z) = \frac{(1+z)^2}{1-z}$.

```
> f:= z->((1+z)/(1-z))^5;
```

$$f := z \to \frac{(z+1)^5}{(1-z)^5}$$

```
> diff(f(z),z);
```

$$\frac{5\,(z+1)^4}{(1-z)^5} + \frac{5\,(z+1)^5}{(1-z)^6}$$

```
> g:= z->((1+z)^2/(1-z));
```

$$g := z \to \frac{(z+1)^2}{1-z}$$

```
> diff(g(z),z);
```

$$\frac{2\,(z+1)}{1-z} + \frac{(z+1)^2}{(1-z)^2}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Εδώ θα υπολογίσουμε τις τιμές των

$$\tan\left(\frac{\pi+2i}{4}\right), \quad \cos(1+i), \quad \cosh(4-6i\pi), \quad \cosh(-2+3i), \quad \cosh^{-1} i.$$

```
> tan((Pi+2*I)/4);
```

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}I\right)$$

```
> evalc(%);
```

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{1}{2}+\sinh(\frac{1}{2})^2}+\frac{\sinh(\frac{1}{2})\cosh(\frac{1}{2})\,I}{\frac{1}{2}+\sinh(\frac{1}{2})^2}$$

```
> combine(%);
```

$$\frac{1+\sinh(1)\,I}{\cosh(1)}$$

```
> cos(1+I);
```

$$\cos(1+I)$$

```
> evalc(%);
```

$$\cos(1)\cosh(1)-\sin(1)\sinh(1)\,I$$

```
> cosh(4-6*Pi*I);
```

$$\cosh(4)$$

```
> cosh(-2+3*I);
```

$$\cosh(2-3\,I)$$

```
> evalf(%);
```

$$-3.724545505-0.5118225700\,I$$

```
> arccosh(I);
```

$$\frac{1}{2}\,I\,\pi+\ln(\sqrt{2}+1)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Εδώ θα υπολογίσουμε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

$$\int_0^{\pi/6} e^{2it}dt,\quad \int_0^{2\pi} e^{m\theta i}e^{-n\theta i}d\theta,\quad \int_0^1 (t+2i)^3dt,\quad \int_0^{\pi/2} e^{t+ti}dt,\quad \int_0^{2\pi} \frac{1}{5-4\cos t}dt.$$

```
> Integrate(exp(2*I*t), t=0..Pi/6):  %=value(%);
```

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{(2\,I\,t)}\,dt = \frac{1}{4}\,I + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

```
> Integrate(exp(m*i*theta)*exp(-n*i*theta),theta=0..2*Pi):  %=value(%);
```

$$\int_0^{2\,\pi} e^{(m\,i\,\theta)}\,e^{(-n\,i\,\theta)}\,d\theta = -\frac{(e^{(m\,i\,\pi)})^2-(e^{(n\,i\,\pi)})^2}{i\,(-m+n)\,(e^{(n\,i\,\pi)})^2}$$

```
> Integrate((t+2*I)^3, t=0..1):  %=value(%);
```

$$\int_0^1 (t+2\,I)^3\,dt = \frac{-23}{4} - 6\,I$$

```
> Integrate(exp(t+I*t), t=0..Pi/2):  %=value(%);
```

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{(t+t\,I)}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{e^{\pi}} + \frac{1}{2}\,I\,\sqrt{e^{\pi}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,I$$

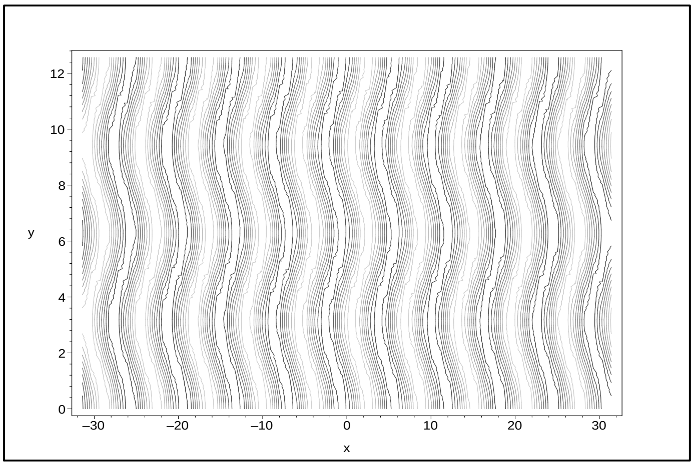
```
> Integrate(1/(5-4*cos(t)), t=0..2*Pi):  %=value(%);
```

$$\int_0^{2\,\pi} \frac{1}{5-4\cos(t)}\,dt = \frac{2\,\pi}{3}$$

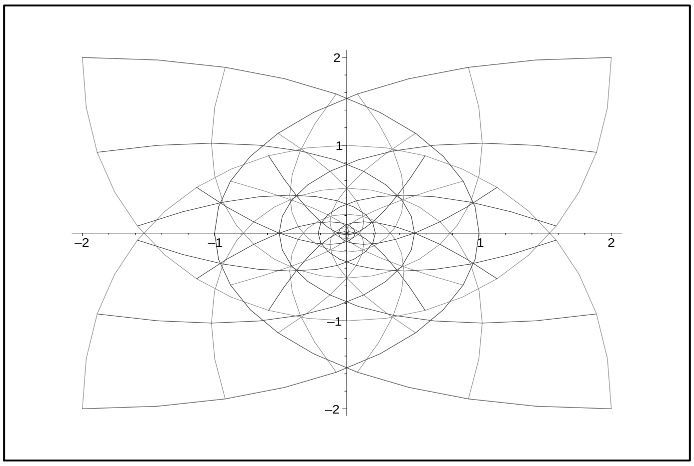
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Για να κατασκευάσουμε χωρία στο Maple, χρησιμοποιούμε τις πιο κάτω εντολές:

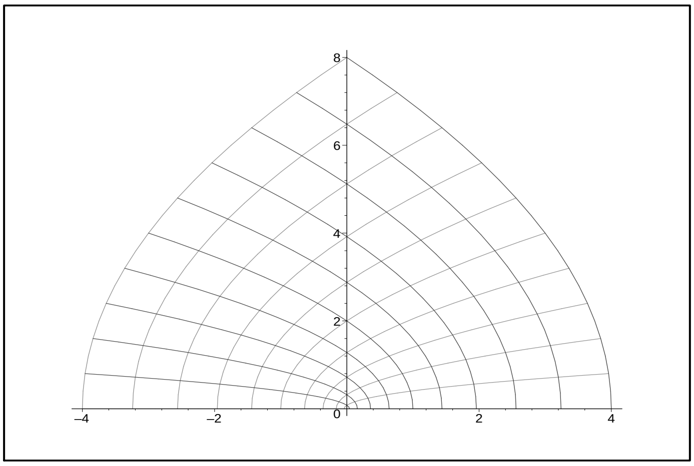
```
> with(plots):
> contourplot(sin(x-cos(y)),x=-10*Pi..10*Pi,y=0..4*Pi,grid=[60,60],axes =BOXED);
```



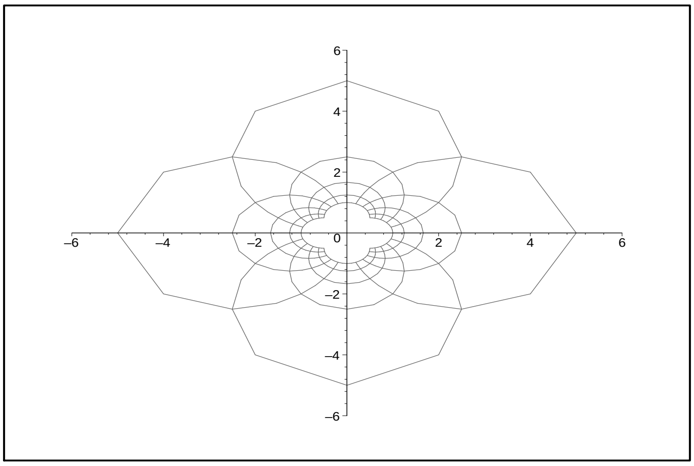

```
> conformal(z^3,z=-1-I..1+I);
```



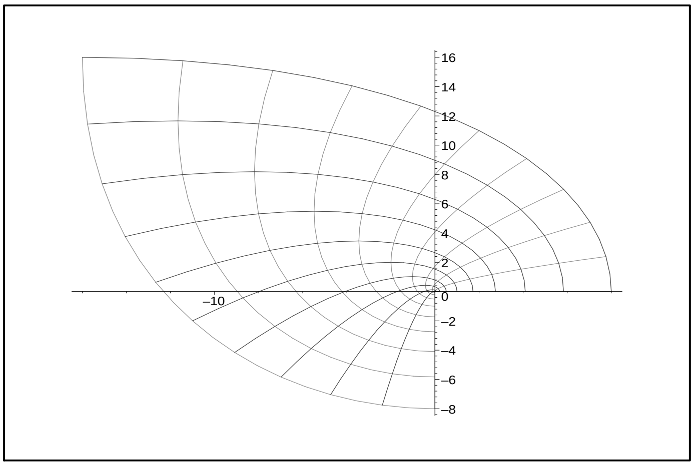

```
> conformal(z^2,z=0..2+2*I);
```



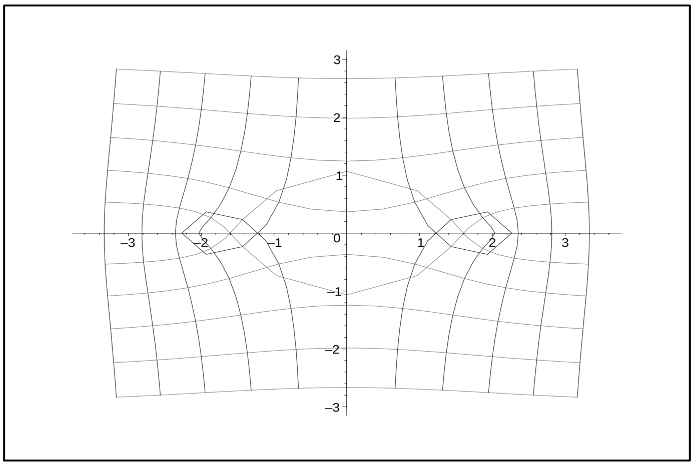

```
>   conformal(1/z,z=-1-I..1+I,-6-6*I..6+6*I, color=magenta);
```



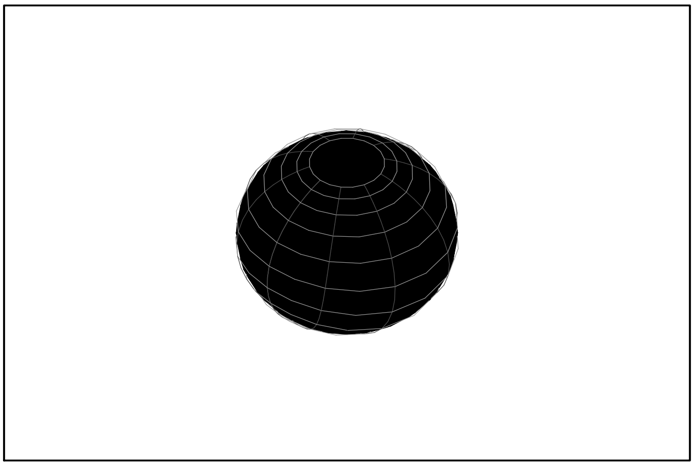

```
>   conformal(z^3,z=0..2+2*I,xtickmarks=3,ytickmarks=6);
```




```
>   conformal(z+1/z,z=-3-3*I..3+3*I);
```




```
>  conformal3d(cos(z),z=0..2*Pi+I*Pi);
```



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.Να κάνετε τις πράξεις:

$$(5-9i)+(2-4i),\quad i(5+7i),\quad (2-3i)(4+i),\quad (2+3i)^2,\quad \frac{2}{i},\quad \frac{2-4i}{3+5i},$$
$$\frac{(3-i)(2+3i)}{1+i},\quad \frac{(5-4i)-(3+7i)}{(4+2i)+(2-3i)},\quad i(1-i)(2-i)(2+6i),\quad (17-6i)\overline{(-4-12i)},\quad \left(\frac{-6+2i}{1-8i}\right)^2.$$

(Απ.: $7-13i,\ -7+5i,\ 11-10i,\ -5+12i,\ -2i,\ -\frac{7}{17}-\frac{11}{17}i,\ 8-i,\ \frac{23}{37}-\frac{64}{37}i,\ 20i,\ 4+228i,\ \frac{1}{4225}(-1632+2024i)$)

2.Στα πιο κάτω θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό $z=x+iy$. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω:

$$Re\left(\frac{1}{z}\right),\quad Im(2z+4\overline{z}-4i),\quad |z-1-3i|,\quad Re(z^2-iz+1),\quad Im(z^2-iz+1).$$

(Απ.: $\frac{x}{x^2+y^2},\quad -2y-4,\quad \sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2},\quad x^2-y^2+y+1,\quad 2xy-x$)

3.Να εκφράσετε τους πιο κάτω μιγαδικούς αριθμούς σε πολική μορφή:

$$z_1=1-\sqrt{3}i,\quad z_2=2,\quad z_3=-3i,\quad z_4=1+i,\quad z_5=-\sqrt{3}+i,\quad z_6=\frac{3}{-1+i}$$

(Απ.: $z_1=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right),\quad z_2=2(\cos 0+i\sin 0),\quad z_3=3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right),\quad z_4=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right),\quad z_5=2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right),\quad z_6=\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$)

4. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω:

$$\begin{aligned}
&z=1-\sqrt{(3)}i,\quad z^3\\
&z=1+\sqrt{3}i,\quad z^9\\
&z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i,\quad z^{10}\\
&z=2-2i,\quad z^5
\end{aligned}$$

(Απ.: $-8,\quad -512,\quad ,\frac{1}{32}i,\quad -128+128i$)

5.Να υπολογίσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

$$a)\ z^3=8,\quad b)\ z^2=i,\quad c)\ z^2=1-\sqrt{3}i,\quad d)\ z^4+1=0,\quad e)\ z^8-2z^4+1=0$$

(Απ.: $a)\ 2,-1+\sqrt{3}i,-1-\sqrt{3}i,\quad b)\ \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i,\quad c)\ \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i,\quad d)\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i),\quad e)\ \pm 1,\ \pm i$)

6.Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

$$\begin{aligned}
&\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)^{12}\\
&\left[\sqrt{8}\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right)\right]^6\\
&\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)^{12}\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^5
\end{aligned}$$

(Απ.: $-i,\quad -\frac{27}{2}-\frac{27}{2}\sqrt{3}i,\quad 16\sqrt{3}+16i$)

7.Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

$$\lim_{z\to i}(4z^3-5z^2+4z+1-5i)$$
$$\lim_{z\to i}\frac{z^4-1}{z-i}$$
$$\lim_{z\to 1-i}\frac{5z^2-2z+2}{z+1}$$
$$\lim_{z\to 1+i}\frac{z^2-2z+2}{z^2-2i}$$

(Απ.: $6-5i$, $-4i$, $\frac{8}{5}-\frac{16}{5}i$, 0)

8.Να βρείτε τις παραγώγους $f'(z)$ των πιο κάτω συναρτήσεων:

$$f(z)=4z^3-(3+i)z^2-5z+4$$
$$f(z)=(2z+1)(z^2-4z+8i)$$
$$f(z)=(z^2-4i)^3$$
$$f(z)=\frac{3z-4+8i}{2z+i}$$

(Απ.: $12z^2-(6+2i)z-5$, $6z^2-14z-4+16i$, $6z(z^2-4i)^2$, $\frac{8-13i}{(2z+i)^2}$)

9.Να υπολογίσετε τα πιο κάτω:

$$\cos(3i),\quad \sin\left(\frac{\pi}{4}+i\right),\quad \tan(1),\quad \sec(\pi+i),\quad \cosh(\pi i),\quad \sinh\left(1+\frac{\pi}{3}i\right),\quad \sin^{-1}(-i),\quad \cos(3+2i),\quad \sin^2(1+i)$$

(Απ.: 10.0677, $1.0911+0.8310i$, $0.7616i$, $-0.6481i$, -1, $0.5876+1.3363i$, $-i\ln(1+\sqrt{2})$, $\cos(3)\cosh(2)-i\sin(3)\sinh(2)$, $\frac{1}{2}[1-\cos(2)\cosh(2)]+\frac{1}{2}i\sin(2)\sinh(2)$)

10.Να υπολογίσετε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

$$\int_1^2(x-ix^2)dx,\quad \int_0^{\pi/4}(\cos(2x)+i\sin(2x))dx,\quad \int_0^1 2it^2(1+t)dt,$$
$$\int_0^{3+i}z^2dz,\quad \int_{1-i}^{1+i}z^3dz,\quad \int_{-i/2}^{1-i}(2z+1)^2dz,\quad \int_{i/2}^{i}e^{\pi z}dz$$

(Απ.: $\frac{3}{2}-\frac{7}{3}i$, $\frac{1}{2}(1+i)$, $\frac{2}{3}(-1+i)$, $6+\frac{26}{3}i$, 0, $-\frac{7}{6}-\frac{22}{3}i$, $\frac{e^\pi}{\pi}-\frac{1}{\pi}i$)