ΑΣΚΗΣΕΙΣ -4

4.1 Να βρεθούν για κάθε μια διαφορική εξίσωση δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις σε μορφή δυναμοσειράς γύρω από το ομαλό σημείο $x = 0$.

(α) $(x-1)y'' + y' = 0$

(β) $(x^2-1)y'' + 4xy' + 2y = 0$

(γ) $(x^2+2)y'' + 3xy' - y = 0$

(δ) $y'' - (x+1)y' - y = 0$

4.2 Να βρεθεί η λύση των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων σε μορφή δυναμοσειράς που ικανοποιεί τις δοσμένες αρχικές συνθήκες.

(α) $(x-1)y'' - xy' + y = 0, \quad y(0) = -2, \;\; y'(0) = 6$

(β) $y'' - 2xy' + 8y = 0, \quad y(0) = 3, \;\; y'(0) = 0$

4.3 Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Frobenious να βρεθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων [το σημείο $x = 0$ είναι σύνηθες μη-ομαλό σημείο].

(α) $2xy'' - y' + 2y = 0$

(β) $3xy'' + (2-x)y' - y = 0$

(γ) $2x^2y'' - x(x-1)y' - y = 0$

(δ) $xy'' + 2y' - xy = 0$

(ε) $xy'' + (1-x)y' - y = 0$

(στ) $xy'' + (x-1)y' - 2y = 0$

4.4 Να βρεθεί η γενική λύση των πιο κάτω διαφορικών εξισώσεων συναρτήσει των συναρτήσεων Bessel.

(α) $9x^2y'' + 9xy' + (9x^2-1)y = 0$

(β) $4x^2y'' + 4xy' + (4x^2-25)y = 0$

(γ) $xy'' + y' + xy = 0$

(δ) $x^2y'' + xy' + (9x^2-4)y = 0$

4.5 Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $y = \dfrac{u(x)}{\sqrt{x}}$, να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$x^2y'' + 2xy' + \lambda^2x^2y = 0, \quad x > 0$$

4.6 Να αποδειχθούν οι αναδρομικοί τύποι:

(α) $xJ_n'(x) = -nJ_n(x) + xJ_{n-1}(x)$

(β) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^nJ_n(x)\right] = x^nJ_{n-1}(x)$

(γ) $2nJ_n(x) = xJ_{n+1}(x) + xJ_{n-1}(x)$

(δ) $2J_n'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$

4.7 Να αποδειχθεί ότι:

(α) $\displaystyle\int_0^x uJ_0(u)\mathrm{d}u = xJ_1(x)$

(β) $\displaystyle\int x^n J_0(x)\mathrm{d}x = x^n J_1(x) + (n-1)x^{n-1}J_0(x) - (n-1)^2 \int x^{n-2}J_0(x)\mathrm{d}x$

4.8 Να αποδειχθεί ότι

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x, \qquad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

Στη συνέχεια να βρεθούν οι πιο κάτω συναρτήσεις συναρτήσει του $\sin x,\ \cos x,$ και δυνάμεις του x.

(α) $J_{\frac{3}{2}}(x)$ (β) $J_{-\frac{3}{2}}(x)$ (γ) $J_{\frac{5}{2}}(x)$ (δ) $J_{-\frac{5}{2}}(x)$

4.9 Να δειχθεί ότι

$$\int_0^b xJ_n(\lambda x)J_n(\mu x)\mathrm{d}x = 0, \quad \lambda \neq \mu$$

με την προϋπόθεση $x = \lambda b$ και $x = \mu b$ είναι λύσεις της εξίσωσης

$$\alpha J_n(x) + \beta x J_n'(x) = 0$$

Να δειχθεί ότι

$$\int_0^b xJ_n^2(\lambda x)\mathrm{d}x = \frac{b^2}{2}\left[[J_n'(\lambda b)]^2 + (1 - \frac{n^2}{\lambda^2 b^2})[J_n(\lambda b)]^2\right]$$

4.10 Να δειχθεί ότι

(α) $J_n''(x) = \frac{1}{4}\left[J_{n-2}(x) - 2J_n(x) + J_{n+2}(x)\right]$

(β) $J_n'''(x) = \frac{1}{8}\left[J_{n-3}(x) - 3J_{n-1}(x) + 3J_{n+1}(x) - J_{n+3}(x)\right]$

Να δοθεί το ανάλογο αποτέλεσμα για την $J_n^{(k)}(x)$.

4.11 Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

(α) $\displaystyle\int x^3 J_2(x)\mathrm{d}x$ (β) $\displaystyle\int_0^1 x^3 J_0(x)\mathrm{d}x$ (γ) $\displaystyle\int \frac{J_2(x)}{x^2}\mathrm{d}x$

4.12 Να δειχθεί ότι

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\theta)\mathrm{d}\theta.$$

4.13 Να δειχθεί ότι

(α) $Y_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}Y_n(x) - Y_{n-1}(x)$

(β) $Y_n'(x) = \frac{1}{2}\left[Y_{n-1}(x) - Y_{n+1}(x)\right]$

4.14 Να αποδειχθεί η γεννήτρια συνάρτηση

$$(1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

Να δειχθεί ότι $P_n(1) = 1$ και $P_n(-1) = (-1)^n$.

4.15 Να αποδειχθεί ότι

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$$

4.16 Να δειχθεί ότι

(i) $P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x)$

(ii) $xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x)$

4.17 Να δειχθεί ότι

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) = \frac{1}{2}\text{cosec}\frac{\theta}{2}$

(ii) $P_2(\cos\theta) = \dfrac{1}{4}(1 + 3\cos 2\theta)$

(iii) $P_3(\cos\theta) = \dfrac{1}{8}(3\cos\theta + 5\cos 3\theta)$

4.18 Να αποδειχθεί ότι

(i) $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x = 0, \quad m \neq n$

(ii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}$

4.19 Γνωρίζουμε ότι $y_1 = x$ είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης του Legendre όταν $n = 1$. Να δειχθεί ότι μια δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση είναι η

$$y_2 = \frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1$$

4.20 Να δειχθεί ότι

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \cdots\right]$$

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα

$$(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!}x^{2(n-k)}$$

να βρεθεί η

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(x^2-1)^n\right]$$

Στη συνέχεια να αποδειχθεί ο τύπος του Rodrigues.