ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
ΜΑΣ 481

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Πέμπτη 17 Μαΐου, 2018

Να λυθούν πέντε (5) θέματα.

---

1. Να δειχθεί ότι $\delta \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \delta F(x,y,y')\,\mathrm{d}x$.

Να βρεθεί η εξίσωση Euler (με απόδειξη) για το πρόβλημα

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,\mathrm{d}x = 0.$$

Να βρεθεί η καμπύλη που δίνει ακρότατη τιμή στο ολοκλήρωμα

$$\int_1^e \left[\frac{1}{2}x^2 y'^2 - \frac{1}{8}y^2\right]\mathrm{d}x,$$

όπου $y(1) = 1$ και $y(e) = 0$.

Στη περίπτωση που η συνάρτηση $f = f(y, y')$, δηλαδή δεν εξαρτάται άμεσα από το x, να δειχθεί ότι η εξίσωση του Euler γράφεται στη μορφή

$$f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = c,$$

όπου c είναι σταθερά.

Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης Euler για το ολοκλήρωμα

$$\int_A^B \frac{{y'}^2}{1+y^2}\mathrm{d}x,$$

όπου $A(0,0)$ και $B(1,2)$.

2. Αν $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, τότε να αποδειχθούν οι ιδιότητες:

(i)
$$\mathcal{L}\left\{t^n f(t)\right\} = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}[F(s)] \quad (n \text{ θετικός ακέραιος})$$

(ii)
$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t}f(t)\right\} = \int_s^\infty F(u)\mathrm{d}u \quad \left(\text{το όριο } \lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t} \text{ υπάρχει}\right)$$

(iii)
$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

Να βρεθεί η μετασχηματισμένη Laplace της συνάρτησης

$$f(t) = \int_t^\infty \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u.$$

Να λυθεί η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y - 2\int_0^t y(u)\mathrm{d}u = 4, \qquad y(0) = 0.$$

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 2t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 4y = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

3. Να διατυπωθεί το θεώρημα σύγκλισης για σειρές Fourier.
Αν $x \in (-\pi, \pi)$, να δειχθεί ότι

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} = \frac{x}{2}.$$

Χρησιμοποιώντας την πιο πάνω σχέση να βρεθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης $f(x) = x^2$ στο διάστημα $(-\pi, \pi)$. Στη συνέχεια να γίνει η γραφική παράσταση αυτής της σειράς Fourier στο διάστημα $(-3\pi, 3\pi)$.
Να υπολογιστούν τα αθροίσματα

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}, \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}.$$

Να βρεθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης $f(x) = x^3 - \pi^2 x$ στο διάστημα $(-\pi, \pi)$.

4. (α) Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}.$$

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της $f(x)$ και στη συνέχεια να δειχθεί ότι

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}.$$

Να βρεθεί ο συνημιτονικός μετασχηματισμός Fourier της $f(x)$ και στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{\sin u \cos au}{u} \mathrm{d}u,$$

όπου a είναι πραγματικός αριθμός.

(β) Να βρεθεί το ημιτονικό και το συνημιτονικό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \sin x$.
Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{2 - x^2}{4 + x^4} \cos ax \mathrm{d}x.$$

5. (α) Χρησιμοποιώντας τη γεννήτρια συνάρτηση για τις συναρτήσεις Bessel, να δειχθεί ότι

$$\cos(x \sin\theta) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos(2n\theta).$$

Στη συνέχεια να δειχθεί ότι

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin\theta) \mathrm{d}\theta.$$

(β) Τα πολυώνυμα Laguerre ορίζονται από τον τύπο (τύπος του Rodrigue)

$$L_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (x^n \mathrm{e}^{-x}).$$

Να βρεθούν τα πολυώνυμα $L_0(x),\ L_1(x)$ και $L_2(x)$.
Τα πολυώνυμα Laguerre ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση

$$x \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + (1 - x) \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ny = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Να δειχθεί ότι τα πολυώνυμα Laguerre είναι ένα ορθογώνιο σύνολο συναρτήσεων στο διάστημα $(0, +\infty)$ ως προς τη συνάρτηση βάρους $w(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

6. Έστω $P_n(x)$ τα πολυώνυμα Legendre. Δίνεται ότι τα πολυώνυμα Legendre $P_n(x)$ ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + n(n+1)y(x) = 0.$$

Να δειχθεί ότι το σύνολο των πολυώνυμων Legendre $\{P_n\,(x)\}$ είναι ορθογώνιο στο διάστημα $(-1,1)$ και ότι

$$\|P_n\,(x)\|^2 = \frac{2}{2n+1}.$$

Να αποδειχθεί ο αναδρομικός τύπος

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x).$$

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 x^2 P_{n+1}(x)P_{n-1}(x)\mathrm{d}x.$$

7. (α) Να μετασχηματισθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \lambda x^2 y = 0, \qquad y(0)=0,\ y'(0)=0$$

(i) σε Volterra ολοκληρωτική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση την $\phi(x) = \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$,
(ii) σε Volterra ολοκληρωτική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση την $y(x)$.

(β) Αφού βρεθεί η συνάρτηση Green για τον κατάλληλο διαφορικό τελεστή, ή διαφορετικά, να μετασχηματιστεί το πρόβλημα

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (\lambda x^2 - 4)y = 0, \qquad y(0)=y(1)=0$$

σε Fredholm ολοκληρωτική εξίσωση.

8. Να δοθεί ο ορισμός της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης, $\mathcal{U}(t-a),\ a>0$.
Να δειχθεί ότι $\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = \mathrm{e}^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}$.
Η μετασχηματισμένη Laplace της συνάρτησης $u(x,t)$ ως προς τη μεταβλητή t, ορίζεται ως

$$\mathcal{L}\{u(x,t)\} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}u(x,t)\mathrm{d}t = U(x,s),$$

όπου το x θεωρείται ως παράμετρος. Να δειχθεί ότι

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = sU(x,s) - u(x,0),\quad \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} = s^2U(x,s) - su(x,0) - u_t(x,0) \ \text{ και } \ \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}.$$

Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών και αρχικών τιμών

$$\begin{aligned}
&u_{xx} = c^2u_{tt} + 2cku_t + k^2u, \quad x>0,\ t>0,\\
&u(0,t) = \sin t, \quad t>0,\\
&u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad x>0,\\
&|u(x,t)| < M,
\end{aligned}$$

όπου c και k είναι σταθερές.