ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
ΜΑΣ 481

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Πέμπτη 19 Μαΐου, 2016

Να λυθούν πέντε (5) θέματα.

---

1. Να δειχθεί ότι $\delta \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} F\left(x, y, y'\right) \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \delta F\left(x, y, y'\right) \mathrm{d}x$.
Να βρεθεί η εξίσωση Euler (με απόδειξη) για το πρόβλημα

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} F\left(x, y, y'\right) \mathrm{d}x = 0.$$

Να βρεθεί η καμπύλη που δίνει ακρότατη τιμή στο ολοκλήρωμα

$$\int_1^2 \left[x^2 y'^2 + 2y^2\right] \mathrm{d}x,$$

όπου $y(1) = 3$ και $y(2) = \frac{5}{2}$.

(β) Να δειχθεί ότι η εξίσωση του Euler μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\frac{1}{y'}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f - \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) - \frac{\partial f}{\partial x}\right] = 0.$$

Να δειχθεί ότι οι καμπύλες $y(x)$ που δίνουν ακρότατη τιμή στο συναρτησιακό

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y} \mathrm{d}x$$

είναι κύκλοι που έχουν το κέντρο τους πάνω στον άξονα των x.

2. Αν $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, να αποδειχθούν οι ιδιότητες

(i) $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}$

(ii) $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

(iii) $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = \lim\limits_{s\to+\infty} sF(s)$, με την προϋπόθεση ότι τα όρια υπάρχουν.

Δίνεται ότι

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\theta)\mathrm{d}\theta.$$

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $J_0(x)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0.$$

Στη συνέχεια να δειχθεί ότι

$$\mathcal{L}\{J_0(x)\} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}.$$

3. Να αναπτυχθεί η συνάρτηση $f(x) = |x|$ σε σειρά Fourier στο διάστημα $-1 \le x \le 1$. Να γίνει η γραφική παράσταση της σειράς Fourier στο διάστημα $-3 \le x \le 3$.

Να αναπτυχθεί η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} -1, & -1 \le x < 0 \\ 1, & 0 < x \le 1 \end{cases}$ σε σειρά Fourier στο διάστημα $-1 \le x \le 1$. Να γίνει η γραφική παράσταση της σειράς Fourier στο διάστημα $-3 \le x \le 3$.

Να υπολογιστούν τα αθροίσματα

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{και} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Χρησιμοποιώντας τη σειρά Fourier της συνάρτησης $f(x) = |x|$, να βρεθεί συνάρτηση της οποίας η σειρά Fourier έχει τη μορφή

$$-\frac{8}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi x}{(2n+1)^3}.$$

4. (α) Να βρεθεί το ολοκλήρωμα Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 < x < 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin kx}{x}dx = \frac{\pi}{2}, \quad k > 0.$

(β) Δίνεται ότι $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

Να δειχθεί ότι η μετασχηματισμένη Fourier $F(\alpha) = \mathcal{F}\{f(x)\}$ της συνάρτησης $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $-\infty < x < +\infty$, ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$2\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\alpha} + \alpha F = 0.$$

Λύνοντας τη πιο πάνω διαφορική εξίσωση, να βρεθεί η μετασχηματισμένη Fourier της συνάρτησης $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $-\infty < x < +\infty$.

5. Έστω $J_n(x)$ η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους τάξης n. Να αποδειχθούν οι πιο κάτω αναδρομικοί τύποι

(i) $J_n(x) = \dfrac{x}{2n}\left[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)\right]$

(ii) $J_n'(x) = \dfrac{1}{2}\left[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right]$

Στη συνέχεια να δειχθεί ότι

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\tfrac{1}{2}x^2(J_n^2(x) - J_{n-1}(x)J_{n+1}(x))\right] = xJ_n^2(x).$$

6. Έστω $P_n(x)$ τα πολυώνυμα Legendre. Δίνεται ότι τα πολυώνυμα Legendre $P_n(x)$ ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + n(n+1)y(x) = 0.$$

Να δειχθεί ότι το σύνολο των πολυώνυμων Legendre $\{P_n\,(x)\}$ είναι ορθογώνιο στο διάστημα $(-1,1)$ και ότι

$$\|P_n\,(x)\|^2 = \frac{2}{2n+1}.$$

Λύνοντας τη διαφορική εξίσωση του Legendre, να βρεθεί το πολυώνυμο $P_3(x)$.

7. (α) Να μετασχηματισθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + y = \sin x, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

(i) σε Volterra ολοκληρωτική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση την $\phi(x) = \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$,
(ii) σε Volterra ολοκληρωτική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση την $y(x)$.

(β) Αφού βρεθεί η συνάρτηση Green για τον κατάλληλο διαφορικό τελεστή, ή διαφορετικά, να μετασχηματιστεί το πρόβλημα

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (\lambda x^2 - 9)y = 0, \qquad y(0) = y(1) = 0$$

σε Fredholm ολοκληρωτική εξίσωση.

8. Η μετασχηματισμένη Laplace της συνάρτησης $u(x,t)$ ως προς τη μεταβλητή t, ορίζεται ως

$$\mathcal{L}\{u(x,t)\} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}u(x,t)\mathrm{d}t = U(x,s),$$

όπου το x θεωρείται ως παράμετρος. Να δειχθεί ότι

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = sU(x,s) - u(x,0) \ \text{ και } \ \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}.$$

Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών και αρχικών τιμών

$$\begin{aligned}
&u_t = u_{xx} + 5\mathrm{e}^{-x}(\cos 2t + \sin 2t), \quad x > 0,\ t > 0,\\
&u(0,t) = -3\cos 2t + \sin 2t, \quad t > 0,\\
&u(x,0) = -3\mathrm{e}^{-x}, \quad x > 0,\\
&|u(x,t)| < M.
\end{aligned}$$