ΕΞΕΤΑΣΗ 2 - 24/3/2018

1. (α) Να βρεθεί η συνημιτονική σειρά της συνάρτησης $f(x) = \sin x,\ 0 \leq x \leq \pi$.
Να υπολογιστούν οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}.$$

(β) Χρησιμοποιώντας τη σειρά Fourier μιας άρτιας συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα $(-p, p)$, να δειχθεί ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = -\frac{a_0^2}{2} + \frac{2}{p} \int_0^p [f(x)]^2 \, \mathrm{d}x.$$

Να βρεθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης $f(x) = x^2$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ και στη συνέχεια να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

2. (α) Αν $x \in (0, \pi)$, να δειχθεί ότι $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

(β) Να βρεθεί το ημιτονικό και το συνημιτονικό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \sin x$.
Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} \frac{2 - x^2}{4 + x^4} \cos ax \mathrm{d}x.$$

3. Να βρεθεί η μετασχηματισμένη Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -1 \\ 1 + x, & -1 \leq x < 0 \\ 1 - x, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & 1 < x < +\infty \end{cases}.$$

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} \mathrm{d}x.$$

4. Δίνεται ότι

$$\mathcal{F}_s\{\operatorname{erfc}(ax)\} = \frac{1}{\alpha} \left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha^2/(4a^2)}\right), \quad \text{όπου } \operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} \mathrm{d}u.$$

Έστω ότι f και f' είναι συνεχείς, η f είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0, \infty)$ και f'' είναι τμηματικά συνεχής σε κάθε πεπερασμένο διάστημα. Αν $f \to 0$ και $f' \to 0$ όταν $x \to \infty$, τότε να δειχθεί ότι

$$\mathcal{F}_s\{f''(x)\} = -\alpha^2 \mathcal{F}_s\{f(x)\} + \alpha f(0).$$

Να βρεθεί η λύση $u(x, t)$ του συνοριακού προβλήματος

$$\begin{aligned} &u_t = K u_{xx}, \quad && x > 0,\ t > 0 \\ &u(0, t) = A, \quad && t > 0 \\ &u(x, 0) = 0, \quad && x > 0 \end{aligned}$$

όπου A και K είναι σταθερές.