ΕΞΕΤΑΣΗ 1 - 16/2/2022

---

1. (α) Χρησιμοποιώντας μεταβολικό συμβολισμό, ή διαφορετικά, να αποδειχθεί η εξίσωση του Euler για το πρόβλημα

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} f\left(x, y, y', y''\right) \mathrm{d}x = 0.$$

Να βρεθεί η καμπύλη $y(x)$ που δίνει ακρότατη τιμή στο ολοκλήρωμα

$$\int_{x_1}^{x_2} y''^3 \mathrm{d}x.$$

(β) Να εκφραστεί η διαφορική εξίσωση

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0$$

με $y(0) = 0,\ y(1) = 1$ σε μεταβολική μορφή.

2. Να δειχθεί ότι η εξίσωση του Euler μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\frac{1}{y'}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f - \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) - \frac{\partial f}{\partial x}\right] = 0.$$

Να βρεθεί η καμπύλη $y(x)$ που καθιστά το ολοκλήρωμα

$$\mathrm{I}[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}dx$$

ελάχιστο, όπου $y(x)$ είναι υποκείμενη στην ολοκληρωτική συνθήκη

$$\int_{x1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}dx \ = \text{σταθερά}.$$

[**Υπόδειξη**: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-1}} = \cosh^{-1} u + c, \quad (u > 1)$]

3. Να δειχθεί ότι οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις της διαφορικής εξίσωσης Sturm-Liouville

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \left[q(x) + \lambda r(x)\right] y = 0$$

μπορούν να βρεθούν αντίστοιχα, υπολογίζοντας τις ακρότατες τιμές του λόγου

$$\lambda = \frac{\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \left(p(x)y'^2 - q(x)y^2\right) \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} r(x)y^2 \mathrm{d}x}$$

και τις συναρτήσεις $y(x)$ που δίνουν τις ακρότατες τιμές του λόγου λ.

4. (α) Αν $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ και το όριο $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{f(t)}{t}$ υπάρχει, να δειχθεί ότι

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)\mathrm{d}u$$

και

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

(β) Χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες ιδιότητες, να βρεθεί η μετασχηματισμένη Laplace της συνάρτησης

$$f(t) = t\int_0^t \frac{1}{u}\mathrm{e}^{-4u}\sin 3u\mathrm{d}u.$$