ΕΞΕΤΑΣΗ 1 - 27/2/2016

---

1. (α) Χρησιμοποιώντας μεταβολικό συμβολισμό, ή διαφορετικά, να αποδειχθεί η εξίσωση του Euler για το πρόβλημα

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} f\left(x, y, y', y''\right) \mathrm{d}x = 0.$$

Να βρεθεί η καμπύλη $y(x)$ που δίνει ακρότατη τιμή στο ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 [y' + y''^2]\mathrm{d}x,$$

όπου $y(0) = y(1) = 0$ και $y'(0) = y'(1) = 1$.

(β) Να δειχθεί ότι οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις της διαφορικής εξίσωσης Sturm-Liouville

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \left[q(x) + \lambda r(x)\right] y = 0$$

μπορούν να βρεθούν αντίστοιχα, υπολογίζοντας τις ακρότατες τιμές του λόγου

$$\lambda = \frac{\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \left(p(x)y'^2 - q(x)y^2\right) \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} r(x)y^2 \mathrm{d}x}$$

και τις συναρτήσεις $y(x)$ που δίνουν τις ακρότατες τιμές του λόγου λ.

2. Να δειχθεί ότι η εξίσωση του Euler μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\frac{1}{y'}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f - \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) - \frac{\partial f}{\partial x}\right] = 0.$$

Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης που δίνει ακρότατη τιμή στο ολοκλήρωμα

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{y^2 + y'^2}\mathrm{d}x.$$

[**Υπόδειξη**: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + c, \quad u > a$]

3. (α) Αφού χρησιμοποιηθούν οι κατάλληλες ιδιότητες της μετασχηματισμένης Laplace, να δειχθεί ότι

$$\mathcal{L}\{\mathrm{Ci}(t)\} = \frac{\log(s^2+1)}{2s},$$

όπου $\mathrm{Ci}(t)$ είναι το συνημιτονικό ολοκλήρωμα.

(β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-3t}\sin t\mathrm{d}t.$$

4. (α) Να εκφραστεί η συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1 \\ 12, & 1 \leq t \leq 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases}$$

συναρτήσει της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης.
Χρησιμοποιώντας μετασχηματισμένες Laplace να βρεθεί η ειδική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 4y = f(t)$$

η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες $y(0) = 0$ και $y'(0) = 0$.

(β) Χρησιμοποιώντας μετασχηματισμένες Laplace να βρεθεί η ειδική λύση του συστήματος

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x + y, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + 2y$$

το οποίο ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $x(0) = 1,\ y(0) = 0$.